ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

TOME I. OCTOBRE 1945. N° 2.

TOME I — OCTOBRE 1945 — N° 2

ANNALES
DE
RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T.S.F.

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE
LA RADIOTECHNIQUE
SOCIÉTÉ INDÉPENDANTE DE T.S.F.
COMPAGNIE RADIO FRANCE
COMPAGNIE RADIO MARITIME
COMPAGNIE RADIO ORIENT
COMPAGNIE RADIO CINÉMA
LA STÉATITE INDUSTRIELLE
SOCIÉTÉ DES TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

LA RECHERCHE TECHNIQUE DANS LE CADRE DES ENTREPRISES ET DES GROUPEMENTS.

PAR E. GIRARDEAU,

Président-directeur général de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

Conférence faite lors du 17e Cycle d'Études de la C.É.G.O.S.

L'unanimité s'est réalisée, en principe, pour reconnaître qu'un vigoureux effort de développement des études et des recherches techniques conditionne l'existence même de la plupart de nos industries, « en principe » davantage qu'en application, si nous considérons les faits et les comportements.

Nul n'ignore que si les ressortissants d'un secteur professionnel n'ont pas d'activité dans la poursuite du progrès technique, ce secteur s'anémie ou passe sous contrôle étranger. Il devrait donc exister une convergence de dispositions légales et professionnelles afin d'encourager cette activité et d'en primer les résultats.

Ces dispositions sont, à l'heure actuelle, trop peu nombreuses. Nous en suggérons quelques autres.

Essayons d'abord de définir quelques termes :

S'il est vrai que des frontières ne sont point aisées à tracer entre les recherches scientifiques, les recherches techniques, les études techniques, cette difficulté n'autorise pas à les confondre. De même qu'il est commode de distinguer les unes des autres les couleurs en teintes fondues du spectre lumineux, il nous semble bon de caractériser ces diverses sortes de travaux, en leur assignant des objets distincts, mais sans pour cela les vouloir confiner dans des espaces étroits. Il ne peut être question de les séparer par des cloisons étanches, puisque leur interpénétration conditionne leur fécondité. Mais cette liaison qui s'impose n'entraîne pas la confusion de tous les efforts visant à la découverte, à l'invention, à la création.

En principe, la découverte est le but de la recherche scientifique; la recherche technique utilise la découverte pour parvenir à l'invention, et l'étude technique, appliquant l'invention, crée le modèle destiné à la production industrielle.

La **recherche technique** a pour but d'appliquer les sciences à des créations utilitaires; elle procure des produits, objets ou procédés ou effets nouveaux par des moyens précédemment inconnus, ou par une combinaison nouvelle de moyens connus.

L'**étude technique** est l'application des résultats obtenus par la recherche technique à la création des prototypes des objets ou produits destinés à la reproduction industrielle, ainsi qu'à la détermination des méthodes et outillages propres à cette reproduction.

Les qualités de l'ingénieur qualifié pour la recherche ou pour l'étude ne sont d'ailleurs pas les mêmes, ni les spécifications des outillages de laboratoire qu'il convient d'affecter à ces travaux.

L'homme excellent pour les recherches doit être capable d'accéder à l'invention principale. La force créatrice est l'imagination soumise au contrôle de la raison; inventer, c'est concevoir sans perdre le sens critique, c'est réaliser une synthèse d'éléments distingués par l'analyse, c'est un effet d'induction puisant ses sources dans le raisonnement déductif. Et pour raisonner, choisir, comparer, faut-il savoir beaucoup. On peut inventer par une transposition fructueuse, en utilisant l'analogie qui suppose des connaissances étendues dans des domaines divers.

Les moyens matériels de l'invention sont d'abord ceux de l'analyse, ensuite ceux du contrôle. Rien que cela donne idée de l'ampleur de ce qui paraît être l'indispensable d'un milieu propice aux travaux de recherches techniques.

Quant aux études, elles exigent moins et plus : moins quant à l'étendue du domaine et à la diversité des outillages, mais davantage à cause de la spécialisation plus poussée et de la proximité de l'atelier de production; elles ne peuvent se passer ni d'un bureau de dessin, ni d'un atelier de prototypes, ni d'un laboratoire d'épreuves, éléments utiles mais non indispensables à un centre de recherches.

Les laboratoires d'entreprises.

Sans beaucoup réfléchir, ni même s'arrêter à une contradiction qui se rencontre trop souvent, les Français admirent volontiers les laboratoires des grandes entreprises étrangères et reprochent à nos industries, composées de maisons de beaucoup moindre importance, et même de petite taille par

rapport à ces firmes gigantesques, de ne pas entretenir des laboratoires de recherches comparables à ceux-là, ce qui est cependant normal.

Ce n'est pas en affaiblissant les grandes entreprises que l'on contribue à la grandeur d'un pays. Il n'y a pas de grand pays sans une économie saine et vigoureuse, et celle-ci dépend pour une bonne part des efforts et des succès dans la recherche du progrès technique. Nous pourrions citer des exemples, mais ils viennent d'eux-mêmes à la mémoire : lorsqu'une technique étrangère s'impose par suite de carence dans la nation, elle est bientôt suivie d'un contrôle économique et financier, l'indépendance est perdue, l'exportation compromise, le prestige du secteur concerné subit une éclipse.

L'occupation économique, pour être moins brutale et moins spectaculaire que l'autre, est redoutable aussi. On ne peut s'y soustraire qu'en participant efficacement à la découverte, à l'invention, au progrès, cela dans l'entreprise, dans la profession et sur le plan national.

L'initiative privée doit agir dans le cadre de ses possibilités; nous savons bien que les frais de laboratoire ne peuvent être compensés que par un pourcentage sur le chiffre d'affaires et qu'ils composent un élément des prix de revient. Selon les activités, l'ordre de grandeur de ce pourcentage est différent, par exemple, autour de 5 % dans la construction électrique si l'on considère une moyenne approximative, pour donner une idée de l'importance du laboratoire d'entreprise.

En raison de la structure générale de l'industrie française, l'existence même d'un laboratoire de recherches est une exception, ce qui d'ailleurs constitue une raison de maintenir et d'encourager cette existence. Je voudrais davantage, et essayer d'établir la conciliation entre la nécessité de favoriser cet effort des entreprises principales et le souci d'en rendre aussi bénéficiaires tous les éléments utiles de la production; ce qui stipule évidemment que chacun contribue, selon ses moyens, à l'effort.

Sur ce terrain, comme sur beaucoup d'autres, droits et devoirs sont étroitement enlacés. Ils ne sont pas les mêmes pour tous. Considérons d'abord la catégorie dite des grosses entreprises, par exemple celles qui dans les constructions mécaniques et électriques occupent plus de mille personnes. C'est un jalon à partir duquel la création d'un service d'études est absolument indispensable et celle d'un service de recherches un devoir. En s'abstenant d'apporter, selon toute la mesure dont elle est capable, sa participation à cette tâche éminente, une entreprise commettrait une sorte de désertion vis-à-vis de la collectivité. Les effets sont doublement pernicieux : se soumettre à une technique importée c'est contribuer à l'affaiblissement de la devise nationale en payant des redevances, c'est aussi priver de travail les meilleurs de nos ingénieurs, l'élite apte à la recherche.

Malheureusement, dans l'état actuel des conditions imposées à l'industrie, les frais et charges d'un service de recherches sont plus coûteux qu'un abonnement à des licences de brevets et assistances techniques venant de l'étranger, et comportent davantage de risques. Il est regrettable et même périlleux pour l'avenir de la recherche technique que celle-ci soit un sujet de conflit entre un devoir et un intérêt, ou plutôt entre deux devoirs puisque, dans la plupart des entreprises importantes, la direction est mandataire et non propriétaire.

Il importe au plus haut point que les institutions soient réformées afin d'éliminer cette pénalisation des initiatives et de leur réserver, au contraire, des encouragements d'une indiscutable efficacité.

Depuis un siècle environ, les conditions et la nature des inventions ont bien changé. Ce n'est pas ce qui contribue le moins au vieillissement de notre législation de la propriété industrielle.

A l'inventeur isolé qui pouvait, sans utiliser de puissants moyens matériels, arriver à créer du nouveau intéressant, s'est peu à peu substituée l'équipe d'ingénieurs disposant d'une documentation copieuse et de laboratoires bien outillés. La plupart des progrès qui ont changé la face de l'industrie, et même celle du monde, sont les fruits de ces serres chaudes que sont les laboratoires modernes. Ce n'est que dans les projets ou les textes des législations attardées que nous retrouvons la conception périmée du pauvre inventeur en chambre, qui vient soudainement offrir à l'humanité ingrate l'objet merveilleux de ses méditations et de ses bricolages. Hélas, les lampes électriques, les tubes électroniques, les moteurs légers, les aciers spéciaux, les produits synthétiques, ne sont pas des champignons de croissance quasi spontanée, mais les résultats d'efforts immenses de nombreux milliers de savants et d'ingénieurs soutenus par une dépense qui se chiffre à milliards. Ce qu'il importe donc d'encourager désormais pour favoriser la recherche, c'est à la fois le travail en équipe et l'équipement des laboratoires, la formation, le recrutement et la récompense d'une élite, en même temps que les investissements, et publics et privés, pour la constitution de puissants moyens matériels de recherche, d'invention et de création.

Le plan national, quelle que soit la nation, ne

suffit même plus au développement de ces grands travaux. A plus forte raison, ne saurait-on envisager que l'existence d'un laboratoire à la juste proportion de la maison, aussi importante qu'elle puisse être, permette d'exclure la coopération internationale; chacun ne peut prétendre à tout inventer; il n'est pas douteux, par exemple, que des échanges de licences ne soient intéressants et fructueux, en venant accroître un actif technique français contre un apport français dans un pays étranger où il nous serait difficile, sinon impossible, d'exercer une activité commerciale. On doit bien comprendre qu'en visant à renforcer la position de l'économie française je ne recommande pas une absurde autarcie ou un nationalisme étroit. Il est fort désirable que des liens internationaux existent et se multiplient aussi bien dans le domaine de la recherche technique que dans celui de la recherche scientifique. Les échanges d'ordre spirituel et d'ordre matériel les plus intéressants pour la civilisation ne sont-ils pas ceux des découvertes et des progrès techniques, qui commandent les productions et les échanges commerciaux et qui aident ainsi à la coordination économique sur le plan international, coordination à laquelle il faut tendre avec ardeur puisqu'elle est un facteur essentiel de la paix dans le monde.

Coordination sur le plan de la profession.

En conséquence de leur effort, chacune des grandes entreprises de chaque profession sera peut-être en possession de brevets, procédés, prototypes; ce n'est pas encore le résultat satisfaisant que nous souhaitons. D'abord, il n'est pas certain que chaque laboratoire ait pu procurer à la maison qui l'anime et le soutient une position sensiblement équivalente à celle de telle ou telle firme étrangère qui a pu dépenser dix ou vingt fois plus dans la recherche. Du point de vue national, il nous semble donc fort désirable qu'une coopération, au moins une coordination, entre les services de recherches des principales affaires de la profession soit établie. Encore une fois, les entreprises françaises les plus importantes ne le sont pas assez pour qu'il nous soit permis de gaspiller le temps et les ressources intellectuelles et matérielles; il y a nécessité d'ajouter, d'harmoniser, d'intégrer les efforts.

Pour toutes les techniques concernant des produits dont l'État est acquéreur, celui-ci peut imposer cette coordination et y présider. C'est un rôle qui est déjà rempli pour le matériel des télécommunications par le Comité des communications impériales quant aux directives générales et aux programmes, et dont l'action est renforcée par le Centre national d'études des télécommunications établi par l'acte du 4 mai 1944, validé par l'ordonnance du 29 janvier 1945, dont l'exposé des motifs porte expressément que « le but est de grouper et de coordonner pour les rendre plus productifs les efforts entrepris en matière de recherches et de réalisations dans le domaine des télécommunications ». Le mot de fédération des laboratoires individuels de divers départements ministériels est inscrit littéralement.

C'est aussi une sorte de fédération des laboratoires industriels de recherches que nous suggérons dans chaque branche d'activité, afin de protéger et renforcer la vitalité de notre économie en améliorant la qualité de la production, en accroissant la capacité d'exportation, en développant enfin l'apport français au progrès technique.

Pour les produits destinés au public, une mission de même nature nous paraît devoir incomber aux dirigeants de chaque profession. Il est vrai qu'ils ne disposent pas de moyens de persuasion aussi efficaces que ceux dont les clients services d'État peuvent user vis-à-vis de leurs fournisseurs : toutefois leur action n'est pas sans possibilité de soutien, surtout dans les circonstances actuelles.

Les centres techniques professionnels.

Les difficultés se multiplient si nous passons au plan des moyennes et petites entreprises : toutefois deux voies restent ouvertes à des solutions éventuelles. D'abord, plusieurs entreprises peuvent se grouper, sans pour cela fusionner, afin d'établir ensemble un service commun de recherches ou d'études. Ce service pourrait prendre autant d'importance que celui d'une entreprise principale de la profession et participer de même à la coordination proposée.

Peu d'imagination suffit pour passer à la conception d'un groupement de la totalité des entreprises d'une même profession. A notre avis, la création d'un centre technique professionnel n'est nullement à écarter, mais elle ne peut résoudre complètement le problème envisagé, dont les éléments sont multiples. Nous ne croyons pas à l'efficacité d'une concentration totalitaire des recherches et des études. L'édification d'un gigantesque monastère qui, pour la seule industrie radioélectrique par exemple, couvrirait de ses bâtiments plusieurs dizaines d'hectares, occuperait plusieurs milliers de techniciens, aurait un budget de quelques centaines de millions, nous paraît actuellement du domaine des rêves, hors du réel. Il ne s'agit pas, au moins pour nous industriels, de projeter dans l'espace l'architecture d'un avenir lointain, mais d'utiliser ce qui

existe, de le perfectionner, de le développer pour des besoins urgents, pour la prochaine décade; faisons cela d'abord et dressons des programmes réalisables.

Ainsi, nous recommandons vivement le centre technique professionnel à l'échelle compatible avec les possibilités techniques; mais cela signifie que son objet est limité. Assignons-lui comme but de mettre à la disposition des ressortissants de la profession un outillage et un personnel suffisants pour les essais qu'ils ne peuvent effectuer chez eux, pour les contrôles de qualité, pour l'orientation de leurs fabrications. Inscrivons aussi aux programmes de travail des centres techniques professionnels des problèmes déterminés présentant un intérêt général pour la profession.

Pour le surplus, l'extension de l'utilisation des inventions réalisées dans les laboratoires d'entreprises peut s'effectuer grâce à des concessions de licences. Il est vrai que, jusqu'ici, celles-ci ne sont pas obligatoires, en dehors des cas réservés par l'État en faveur des services de la défense nationale. Chacun est libre de demander licence au propriétaire du brevet et celui-ci peut l'accorder ou la refuser. Des projets existent qui la rendraient obligatoire, au moins pour certaines applications. C'est une question délicate : s'il est conforme à l'intérêt général que chaque producteur bénéficie des progrès techniques, il est non moins essentiel, dans le même souci d'intérêt général, que la recherche, l'invention, la création soient payantes, sinon le laboratoire, élément vital, serait condamné à mort. Nous nous plaignons déjà, à juste titre, de l'insuffisance de protection des inventions et des droits qui s'y rattachent, et je suis sûr que des voix autorisées vont s'élever dans ce cycle d'études, qui réclameront avec pertinence la révision d'une législation périmée. Il est souhaitable que des dispositions nouvelles accordent davantage de faveur aux audacieux qui vouent leur activité et consacrent les moyens de toute nature dont ils disposent à la création et à l'invention. L'État ferait davantage pour la recherche technique par une meilleure protection de l'invention qu'en investissant des sommes considérables dans des laboratoires industriels. C'est plutôt sur le plan de la recherche scientifique que le financement par l'État devrait largement intervenir.

Il existe, en tout cas, deux possibilités ouvertes aux entreprises qui ne sont pas assez importantes pour établir et entretenir chez elles un laboratoire : celle de se grouper pour participer aux fruits d'un laboratoire commun et celle d'obtenir une licence d'un tiers. Ce qui doit être exclu, c'est la prétention de bénéficier gratuitement des progrès réalisés. Pour la création d'un centre technique professionnel, nous proposons un lien nécessaire et insuffisant, qui devrait être doublé par une amélioration des rapports entre les producteurs sur le terrain du progrès technique. Nous envisageons dans toute la mesure où cela se peut, des rapports libres, nous voudrions éviter la contrainte. On peut user de la liberté pour s'unir ou pour se combattre. Plus que jamais elle ne le fut, l'union est nécessaire. Il s'agit de la favoriser sous les signes de l'intérêt national et de l'équité. On sait jusqu'à quel point l'exercice de la liberté a permis aux industries américaines de conquérir le progrès technique et de développer des productions de qualité. A tous les degrés, dans tous les domaines, l'invention est à l'honneur, et presque toujours elle est compensatrice des frais qu'elle comporte. C'est un exemple dont nous pouvons nous inspirer.

Aussi avons-nous invité chaque entreprise principale à l'effort pour la recherche technique, suggéré la coordination entre les services de recherche des entreprises de la profession, engagé les entreprises moyennes et petites à constituer des groupements pour établir aussi de tels services, proposé la création, ou l'extension là où il en existe, de centres techniques professionnels. Le Centre national de la recherche scientifique, ainsi que les dirigeants des professions ont un rôle éminent à jouer dans l'organisation, l'extension et l'utilisation des recherches et des études. Il leur appartient de s'employer à persuader leurs ressortissants de l'intérêt qui s'attache, pour tous, au respect des droits conférés par le succès dans la création et l'invention. L'élimination des abus, d'où qu'ils viennent, rentre également dans leurs attributions. Nous connaissons les obstacles qui jonchent la route dans laquelle nous nous permettons de pousser si délibérément les personnages consulaires ou représentatifs de nos activités; les barrières les plus hautes ne sont pas d'ordre matériel, elles prennent appui sur l'individualisme excessif qui s'oppose à l'esprit d'équipe; osons le dire, nous souffrons d'un manque de sensibilité à l'endroit de l'intérêt professionnel, c'est-à-dire en fin de compte de l'intérêt national. Or, l'intérêt national c'est tout de même l'intérêt de chaque membre de la collectivité. Il serait magnifique que, par l'exercice de la liberté reconquise, les efforts individuels, ardents et coordonnés, portent ou maintiennent la technique française au premier rang : tel doit être notre objectif.

ÉTUDE SUR LA DIFFRACTION ET LES RÉFLEXIONS DES ONDES GUIDÉES.

PAR J. ORTUSI,

Ancien élève de l'École Polytechnique,
Ingénieur au Laboratoire de Recherches Physiques
de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *Cet article est le texte de la thèse que l'auteur a soutenue en Sorbonne le 11 mars 1944 pour l'obtention du Doctorat ès Sciences physiques.*

Il contient une étude théorique et expérimentale de la diffraction et de la réflexion des ondes guidées.

L'auteur fait la critique de l'emploi des formules de diffraction de Kottler dans le cas des ouvertures petites.

A l'aide d'un appareil de mesure absolue du champ électrique, dont le principe est établi dans la première partie, il étudie expérimentalement les coefficients de réflexion de ces ondes et justifie ainsi la théorie qui en est faite préalablement.

Introduction.

L'emploi des ondes très courtes, durant ces dernières années, s'est développé de façon considérable. Il est possible, actuellement, d'entretenir facilement des ondes de l'ordre du décimètre de longueur d'onde avec des puissances de plusieurs dizaines de watts permettant une mise en évidence aisée de ces ondes. La technique de leur utilisation diffère assez de la technique habituelle de la T. S. F.; les notions de self et de capacité doivent être, en général, écartées et remplacées par la notion de propagation d'ondes électromagnétiques régies par les équations de Maxwell. Toutefois, à l'encontre de l'optique, la valeur directement accessible de la longueur d'onde permet l'emploi d'appareils de dimensions tels que, tout en conservant dans une certaine mesure la valeur directive de la propagation de l'énergie, les phénomènes de diffraction apparaissent avec une netteté particulière.

Le but de nos recherches est une étude de la réflexion et de la diffraction de ces ondes. Pour éviter les perturbations extérieures, très gênantes aux fréquences élevées, nous avons utilisé la possibilité de canaliser les ondes en les propageant à l'intérieur de guides conducteurs. L'étude de la propagation des ondes à l'intérieur des guides et cornets, commencée dès 1890 par Lord Rayleigh, s'est développée depuis 1936 et a permis l'utilisation de plus en plus marquée par l'industrie de cette technique particulière. Un remarquable résumé des travaux publiés sur ces questions, ainsi que sur les questions de diffraction, a été entrepris dans le livre *Propagation dirigée des ondes électromagnétiques* de Louis de Broglie (1940). Ce livre, ainsi que l'importante bibliographie qui y est indiquée, nous a servi constamment. Rappelons brièvement quelques particularités de la propagation guidée des ondes décimétriques.

Ces ondes peuvent être canalisées dans des tubes conducteurs cylindriques appelés guides, ou dans des cornets qui amènent au tube l'énergie des ondes émises ou la rayonnent à l'extérieur. La forme des ondes à l'intérieur d'un guide dépend de la section droite de ces tubes et de la direction de polarisation des ondes qui s'y propagent. On la trouve en cherchant les solutions des équations de Maxwell qui, sur la surface intérieure du guide supposé parfaitement conducteur, satisfont aux conditions

que le vecteur électrique n'ait pas de composantes parallèles à cette paroi. Il existe, en général, dans un guide, une double infinité de systèmes de solutions possibles dites électriques ou magnétiques suivant que la composante magnétique ou électrique longitudinale est nulle. La vitesse de propagation de la phase dépend de la forme et des dimensions de la section droite. Un guide ne peut, si ses dimensions ne sont pas extrêmement grandes par rapport à la longueur d'onde, transmettre qu'une suite finie d'ondes de chacune des classes. Il arrive même qu'aucune onde progressive, de fréquence plus basse qu'une valeur donnée (dite fréquence de coupure), ne puisse circuler dans le guide.

Nous avons choisi, pour notre étude, l'onde plane qui se rapproche le plus de l'onde plane homogène indéfinie. C'est l'onde du type magnétique H_{01} circulant à l'intérieur d'un guide de section rectangulaire. Toutefois, les résultats que nous obtiendrons sont valables quel que soit le type d'onde guidée employé. Seules, quelques légères modifications dans le détail des appareils doivent être apportées dans le cas général. Nous utiliserons principalement des guides de 4 cm × 30 cm. Avec ces dimensions, les seuls types d'ondes qui peuvent se propager dans le domaine de longueurs d'onde employées (20 à 30 cm) sont les ondes magnétiques H_{01} et H_{02} pour lesquelles le vecteur électrique n'a qu'une composante parallèle au petit côté de la section droite, tandis que le vecteur magnétique a une composante parallèle au grand côté et une composante normale au plan de la section droite. Nous éliminerons autant que possible l'onde parasite H_{02}.

Nous avons été amenés pour le type d'onde H_{01} choisi, à employer un appareil de mesure absolue du champ électrique fondé sur l'étude du rayonnement d'un fil conducteur connecté à deux parois opposées du guide.

Dans une première partie, nous indiquerons la description de cet appareil ainsi que ses divers modes d'utilisation.

Dans une seconde partie, nous étudierons théoriquement et mesurerons par l'appareil précité la réflexion d'une onde H_{01} d'un guide ou d'un cornet sur divers obstacles (diffraction, réflexion sur un isolant, etc.).

Avant d'aborder cette étude, nous allons décrire théoriquement les types d'ondes H_{01} et H_{02} qui peuvent circuler dans les guides et cornets utilisés ainsi que l'assimilation qui peut être faite d'un guide rectangulaire parcouru par l'onde H_{01} avec une ligne.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DES TYPES D'ONDE UTILISÉS.

Propriétés de l'onde H_{01}.

Le plan de l'onde est perpendiculaire à l'axe du guide. Soient Ox, Oy, Oz les axes de symétrie du guide, Oz parallèle à l'axe de propagation et Ox au petit côté.

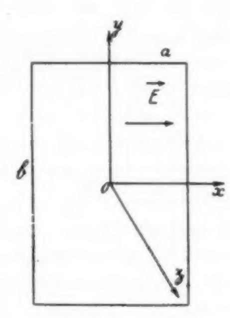


Fig. 1.

Les vecteurs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$ ont leurs composantes définies par [1-1] :

$$E_x = E_0 \cos \frac{\pi y}{b} e^{i(kct - k_z z)}, \qquad E_y = E_z = 0;$$

$$H_y = \frac{k_z}{k} E_x;$$

$$H_z = \frac{i}{k} \frac{\pi}{b} E_0 \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(kct - k_z z)}, \qquad H_x = 0.$$

en unités de Gauss.

E_0 est une constante complexe dont le module représente l'amplitude maximum du vecteur électrique.

On pose :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad k_z^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}.$$

Cette dernière condition impose à l'onde une vitesse de phase plus grande que la vitesse de propagation d'une onde plane indéfinie.

L'énergie qui traverse par seconde une section droite du guide est indépendante de z et égale à

$$W = \frac{c |E_0|^2 S}{16\pi} \frac{k_z}{k} \quad \text{U.E.S.}$$

[1] *Voir* bibliographie page 133.

Propriétés de l'onde H_{02}.

Avec les mêmes axes de coordonnées, l'onde H_{02} est représentée par un vecteur électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$ ayant pour composantes [1-1]

$$E_x = E_0 \sin\frac{2\pi y}{b} e^{i(kct-k_z z)}, \qquad E_y = E_z = 0;$$

$$H_y = \frac{k_z}{k} E_x;$$

$$H_z = -\frac{i}{k}\frac{\pi}{b} E_0 \cos\frac{2\pi y}{b} e^{i(kct-k_z z)}, \qquad H_x = 0,$$

avec

$$k_z^2 = k^2 - \frac{4\pi^2}{b^2}.$$

Le champ électrique de cette onde est nul le long de l'axe Ox. Il prend des valeurs opposées pour deux points symétriques par rapport à Ox. Cette onde ne peut exister que si l'excitation ne possède pas la symétrie par rapport à Ox.

Définition du cornet sectoral.

Il permet de collecter une onde provenant d'un émetteur ou de rayonner à l'extérieur les ondes propagées par un guide. Il est constitué de deux secteurs métalliques prolongeant deux faces opposées d'un guide rectangulaire et reliées par deux plans (*fig.* 2). L'ouverture est une portion de cylindre circulaire droit. Suivant que l'on prolonge les plus petites parois du guide ou les plus grandes, on obtient un cornet divergent selon la largeur ou un cornet divergent selon la hauteur. Les axes utilisés pour représenter les champs sont définis par la figure 3.

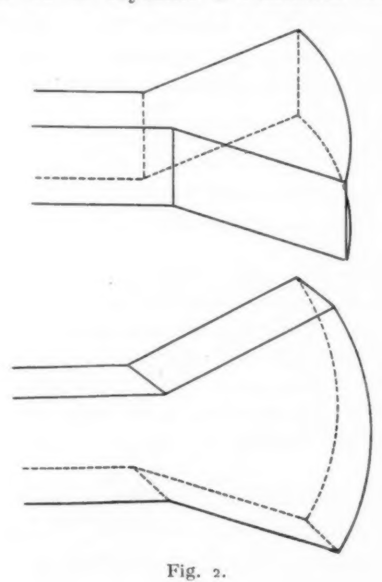


Fig. 2.

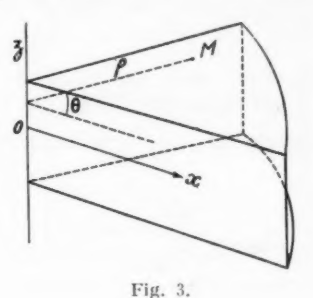


Fig. 3.

Un point M de l'intérieur du cornet est défini par ses coordonnées semi-polaires autour de l'axe Oz du cornet : ρ, θ, z. Nous supposerons que les ondes qui y circulent sont des ondes magnétiques du type H_{01}. Les surfaces d'ondes sont des cylindres d'axe Oz. Les ondes peuvent être divergentes et sortant du cornet, elles sont alors représentées par une fonction de Hanckel d'indice 2 ou convergentes et entrant dans le cornet, elles sont alors représentées par une fonction de Hanckel d'indice 1.

Cornet sectoral divergent suivant la largeur. — Les composantes du champ électrique et magnétique de l'onde divergente utilisée sont [2-1]

$$E_\theta = E_0 \cos\frac{\pi z}{b} \mathcal{H}_1^{(2)}(\alpha\rho) e^{ikct},$$

$$H_\rho = E_0 \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} \sin\frac{\pi z}{b} \mathcal{H}_1^{(2)}(\alpha\rho) e^{ikct},$$

$$H_z = E_0 \frac{i}{k}\alpha \cos\frac{\pi z}{b} \mathcal{H}_0^{(2)}(\alpha\rho) e^{ikct},$$

$$E_\rho = E_z = H_\theta = 0.$$

$\mathcal{H}_1^{(2)}$ et $\mathcal{H}_0^{(2)}$ représentent les fonctions de Hanckel d'indice 2.

La constante α est donnée par

$$\alpha^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}.$$

L'onde convergente s'obtient à partir de ces formules en permutant l'indice des fonctions de Hanckel utilisées.

Les lignes de force électriques sont des cercles dont le centre est sur Oz.

Cornet sectoral divergent suivant la hauteur. — On utilise l'onde divergente ayant des champs dont les

composantes sont [2-1]

$$E_z = E_0 \mathcal{H}_p^{(2)}(k\rho)\cos p\theta\, e^{ikct},$$

$$H_\rho = -E_0 \frac{ip}{k\rho} \mathcal{H}_p^{(2)}(k\rho)\sin p\theta\, e^{ikct},$$

$$H_\theta = -E_0 i \mathcal{H}_p^{(2)}(k\rho)\cos p\theta\, e^{ikct},$$

$$E_\theta = E_\rho = H_z = 0.$$

L'axe Ox étant situé au milieu du cornet, la constante p, qui représente l'ordre des fonctions de Hanckel utilisées, est $p = \frac{\pi}{\theta_0}$, θ_0 angle du cornet.

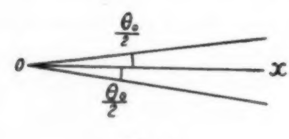


Fig. 4.

L'onde convergente s'obtient à partir de ces formules en permutant l'indice des fonctions de Hanckel employées.

Pertes dans les guides et cornets.

Les formules que nous avons données sont relatives à des guides dont les parois ont une conductibilité électrique infinie. Pour des parois faiblement résistantes, la forme de l'onde n'est pas sensiblement modifiée. Il suffira d'introduire, dans les termes de propagation, $e^{i(kct-k_z z)}$, un terme réel d'amortissement $e^{-\gamma z}$. L'expression de γ se déduit du calcul des pertes par effet Joule dues aux courants dans la paroi. Pour un guide d'aluminium, γ est de l'ordre de 5.10^{-6} [1-2].

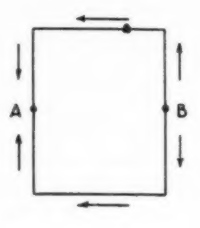
L'amortissement est insignifiant pour les distances de l'ordre de quelques mètres utilisées dans les expériences. Celles-ci confirment d'ailleurs pleinement ce résultat.

CHAPITRE II.

Assimilation d'un guide rectangulaire parcouru par l'onde H_{01} avec une ligne. Définition du coefficient de réflexion.

L'étude des courants circulant dans les parois, calculés à partir des valeurs du champ magnétique le long de celles-ci, donne le résultat suivant [1-3] :

1° Il existe des courants circulant le long d'une section perpendiculairement à la direction de la propagation.



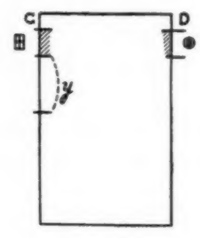


Fig. 5.

Ces courants sont nuls aux points A et B (*fig.* 5).

2° Il existe, le long de chaque bande C ou D, à la hauteur y, un courant longitudinal symétrique par rapport à Oy et proportionnel au champ électrique $\vec{E}$ régnant à cette hauteur.

La différence de potentiel entre C et D étant $V = aE$, on a

$$I = \frac{V}{Z_c}\,\mathrm{d}y,$$

avec

$$Z_c = 4\pi a \frac{k}{k_z}.$$

Le guide peut donc, vis-à-vis de ces courants, être considéré comme formé par une infinité de lignes élémentaires d'impédance caractéristique Z_c par unité de hauteur. L'amortissement γ de la ligne a été montré égal à 5.10^{-6}. Il est très faible [3], [5].

Le guide rectangulaire fonctionne comme une ligne très peu amortie.

Obstacles. Coefficient de réflexion et de transmission.

En pratique, un guide ne peut être de longueur infinie. Il doit donc se terimner en deux plans P_1 et P_2 par diverses discontinuités qui réfléchissent les ondes circulant dans un sens donné (*fig.* 6 *a*).

On appelle « obstacle », dans un guide, toute cause de perturbation dans la propagation des ondes.

Un obstacle est dit « intercalé », lorsqu'il est précédé et suivi de deux portions de guide indéfini

(*fig.* 6 *b*). Il est dit « terminal » lorsqu'il est placé au bout d'un guide.

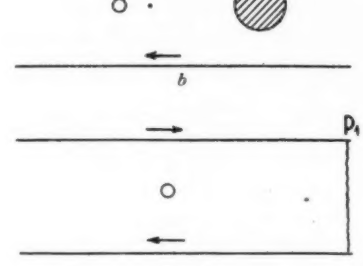


Fig. 6.

Par définition, nous appellerons coefficient de réflexion d'une onde H_{01} sur un obstacle AB, la quantité complexe définie comme suit :

Soit $E_0 \cos \frac{\pi y}{b} e^{i(kct-k_z z)}$ le champ électrique de l'onde incidente. Il existe une onde réfléchie circulant en sens inverse dont le champ électrique est $E_r \cos \frac{\pi y}{b} e^{i(kct+k_z z)}$, cette onde étant supposée devenue une onde H_{01} à plus ou moins grande distance du plan de l'obstacle. Le coefficient de réflexion est le rapport des deux nombres complexes

$$R = r e^{i\varphi} = \frac{E_r}{E_0}.$$

Il est facile de voir que le coefficient de réflexion mesuré par rapport à un plan CD (*fig.* 7), distant de la longueur *d* de AB, est égal à

$$R' = R e^{-2ik_z d}.$$

L'obstacle est équivalent à une impédance placée dans une ligne terminée au plan AB, et donnée par la formule

$$Z = \frac{1+R}{1-R} Z_c.$$

Par définition, l'impédance Z de AB sera dite égale à l'impédance caractéristique du guide lorsque le coefficient de réflexion correspondant est nul. Nous verrons que cette condition peut être réalisée de plusieurs façons différentes que nous examinerons par la suite. Un guide terminé par son impédance

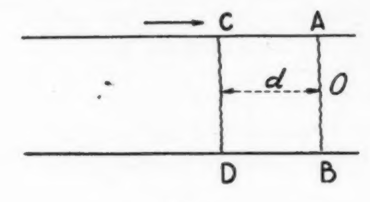


Fig. 7.

caractéristique est équivalent à un guide indéfini. On définit, de la même manière, le coefficient de transmission (*fig.* 8) d'un obstacle intercalé, comme

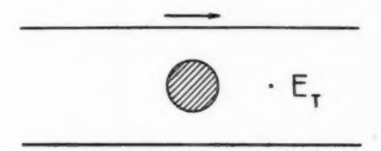


Fig. 8.

le rapport du champ transmis dans la portion de guide postérieure à lui au champ incident supposé mesuré au même endroit. Dans le cas d'un obstacle terminal, c'est le rapport entre le champ diffracté réel et le champ diffracté par la même ouverture en supposant qu'il n'y ait pas de réflexion.

Cas de deux obstacles.

S'il existe deux obstacles terminaux AB et A'B' et si R_1 et R_2 désignent les coefficients de réflexion

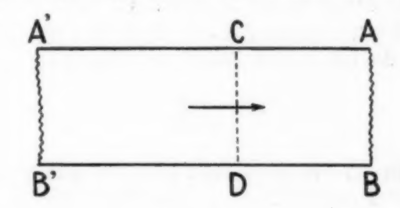


Fig. 9.

en AB et A'B', vus de CD, le coefficient de réflexion total, pour une onde circulant initialement dans le sens de la flèche de la figure 9, se calcule à partir de la série des réflexions alternatives sur AB et A'B'. On trouve la valeur

$$R = \frac{R_1(1+R_2)}{1-R_1 R_2}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

PRINCIPE DE LA MESURE DES CHAMPS ÉLECTRIQUES.

Le champ électrique à mesurer est le champ d'une onde H_{01} circulant dans un guide rectangulaire. Le long d'un axe parallèle au petit côté, le champ est polarisé et constant.

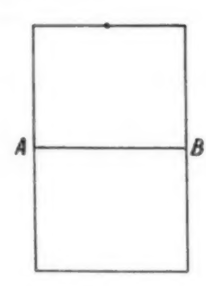


Fig. 10.

Un fil cylindrique de rayon r est placé suivant AB en contact avec les deux parois du guide en A et B. Il existe, entre ces deux points, une différence de potentiel

$$V = aE,$$

a, largeur du guide.

Le fil est parcouru par un courant I constant le long de AB et proportionnel à V.

En désignant par Z l'inverse de ce rapport (impédance du fil), le courant I s'exprime par

$$I = \frac{aE}{Z}.$$

La mesure de E se ramène alors à la mesure du courant I et à la détermination théorique de l'impédance Z [1].

Mesure du courant de haute fréquence I.

Le module de I se mesure par la quantité de chaleur dégagée par le passage du courant dans le fil.

[1] *Voir* H. Gutton et J. Ortusi, *C. R. Acad. Sc.*, 217, 1943, p. 18.

Si W est la puissance correspondant à ce dégagement de chaleur et R la résistance en haute fréquence du fil :

$$W = \frac{1}{2} R \, |I|^2.$$

Détermination théorique de l'impédance Z.

Le fil AB, lorsqu'il est parcouru par le courant I, rayonne à l'intérieur du guide. Le champ électrique de l'onde rayonnée est parallèle au fil.

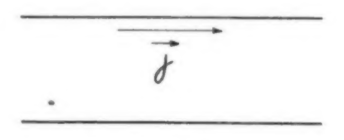


Fig. 11.

Désignons par E' la valeur de ce champ sur la surface du fil et par ρ et $\vec{j}$ la résistivité et le vecteur densité de courant sur la surface. La loi d'Ohm appliquée à un point de la surface du fil donne

$$\vec{E} + \vec{E'} = \rho \vec{j}.$$

Posons

$$-E' = Z_1 I,$$
$$\rho j = Z_2 I.$$

On en tire immédiatement

$$Z = (Z_1 + Z_2)a.$$

Détermination de Z_2. — Il s'agit pour cela de connaître le rapport entre la densité de courant sur la surface et l'intensité totale d'un courant traversant un fil de rayon r.

Les équations de propagation dans un milieu résistant donnent le résultat :

Soient σ la conductibilité du fil et ω la pulsation du courant. On suppose, en outre, le fil non magnétique. Posons

$$q = r\sqrt{4\pi\sigma\omega}.$$

Le courant I et la densité j sont donnés par les relations

$$j = u(\operatorname{ber} q + i \operatorname{bei} q),$$
$$I = \frac{2\pi r^2}{q} u(\operatorname{bei}' q - i \operatorname{ber}' q),$$

u est une constante et les fonctions *ber* et *bei* sont les fonctions de Lord Kelvin. On en déduit

$$Z_2 = \frac{\rho j}{I} = \frac{\gamma}{\pi r^2}\,\frac{q}{2}\,\frac{ber\,q + i\,bei\,q}{bei'\,q - i\,ber'\,q}.$$

Si R_0 désigne la résistance du fil par unité de longueur en courant continu

$$Z_2 = R_0\,\frac{q}{2}\,\frac{ber\,q + i\,bei\,q}{bei'\,q - i\,ber'\,q}.$$

En prenant la partie réelle de Z_2, on obtient la résistance R en haute fréquence du fil.

Les valeurs de la fonction $\frac{q}{2}\,\frac{ber\,q + i\,bei\,q}{bei'\,q - i\,ber'\,q}$ sont données par les tables de Jahnke [6-1].

Cette impédance de conduction, de l'ordre de R_0 (une dizaine d'ohms), est faible vis-à-vis de l'impédance de rayonnement Z_1 que l'on calcule à partir de la détermination de l'onde rayonnée.

Rayonnement d'un fil cylindrique parcouru par un courant constant sur toute sa longueur.

Nous calculerons ce rayonnement et, par suite, Z_1 dans les trois cas suivants :

1° Fil conducteur placé entre deux plans conducteurs parallèles indéfinis.

2° Fil conducteur placé dans un guide rectangulaire indéfini.

3° Fil conducteur placé dans un guide terminé par deux obstacles.

1. Rayonnement d'un fil cylindrique parcouru par un courant constant sur toute la longueur entre deux plans conducteurs indéfinis.

On emploie des coordonnées semi-polaires d'axe Oz (*fig.* 12).

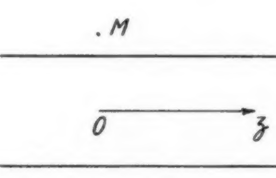


Fig. 12.

Le champ électromagnétique rayonné en $M(\rho, \theta)$ se déduit immédiatement des équations de Maxwell. En ne considérant que l'onde divergente, les vecteurs électriques et magnétiques ont pour composantes

$$E_z = u\mathcal{H}_0^{(2)}(k\rho), \qquad E_\theta = E_\rho = 0,$$
$$H_\theta = ui\mathcal{H}_1^{(2)}(k\rho), \qquad H_z = H_\rho = 0.$$

La valeur de la constante complexe u se déduit du théorème d'Ampère appliqué à un circuit entourant le fil dans un sens convenable à la distance r (rayon du fil) (*fig.* 13).

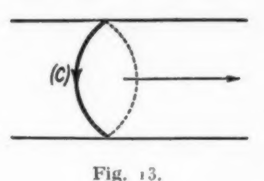


Fig. 13.

$$\frac{4\pi I}{c} = \int_C H_\theta\,ds = 2\pi r H_\theta \qquad (\rho = r),$$

d'où l'équation

$$ui\mathcal{H}_1^{(2)}(kr) = \frac{2I}{cr}.$$

On en tire, après élimination de u,

$$E_z = -i\,\frac{2}{cr}\,\frac{\mathcal{H}_0^{(2)}(kr)}{\mathcal{H}_1^{(2)}(kr)}\,I,$$

ce qui donne l'impédance de rayonnement

$$Z_1 = \frac{2}{cr}\,\frac{i\mathcal{H}_0^{(2)}(kr)}{\mathcal{H}_1^{(2)}(kr)}.$$

Pour avoir Z_1 en ohms, on multiplie par $10^{-9}c^2$.

$$Z_1 = \frac{60}{r}\,i\,\frac{\mathcal{H}_0^{(2)}(kr)}{\mathcal{H}_1^{(2)}(kr)} \quad \text{ohms}.$$

Pour des fils de diamètre assez petit, on a

$$\mathcal{H}_1^{(2)}(kr) = \frac{2i}{\pi kr} = \frac{\lambda i}{\pi^2 r}.$$

D'où

$$Z_1 = \frac{60\pi^2}{\lambda}\,\mathcal{H}_0^{(2)}(kr) \quad \text{ohms}.$$

Cette impédance est, pour les longueurs d'onde et les fils employés, de plusieurs centaines d'ohms. Elle est très grande vis-à-vis de l'impédance de conduction même si le fil est résistant. Ce sera la seule que nous considérerons.

La partie réelle de Z_1 est la résistance de rayonnement

$$\mathcal{R} = \frac{60\pi^2}{\lambda} \quad \text{ohms}.$$

La puissance rayonnée dans tout l'espace est

$$W = \frac{1}{2}\mathcal{R}\,|I|^2.$$

Le calcul de l'intégration du vecteur de Poynting, dans une surface cylindrique de rayon ρ et d'axe Oz, donne le même résultat.

Le calcul numérique de $\mathcal{H}_0^{(2)}(kr)$ donne

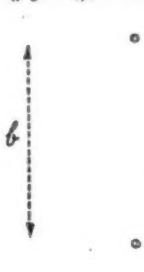
$$\mathcal{H}_0^{(2)}(kr) = 1 - iY_0(kr)$$

avec

$$Y_0(kr) = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{2}{\gamma kr} \qquad \text{et} \qquad \gamma = 1{,}781.$$

2. **Cas d'un fil placé dans un guide rectangulaire indéfini.**

Si le fil est placé dans un tel guide parallèlement à la polarisation (*fig.* 14), le rayonnement du fil est



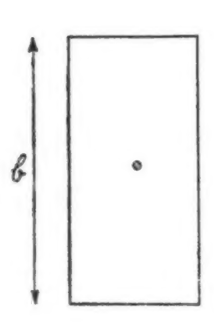


Fig. 14.

obtenu par application du principe des images électriques. Le champ électromagnétique est la somme de la série des champs dus au rayonnement d'une série de fils symétriquement disposés par rapport aux plans supérieurs et inférieurs du guide. Ceci suppose que les parois supérieures et inférieures sont parfaitement réfléchissantes, donc parfaitement conductrices.

Dans le cas où le fil est placé au milieu du guide, le champ électrique le long du fil est donné par la série suivante :

$$E = u\,\mathcal{H}_0^{(2)}(kr) + u\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\,\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-nkb\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}kb\sqrt{n}}}.$$

Le champ magnétique gardant la même valeur que précédemment. L'impédance de rayonnement

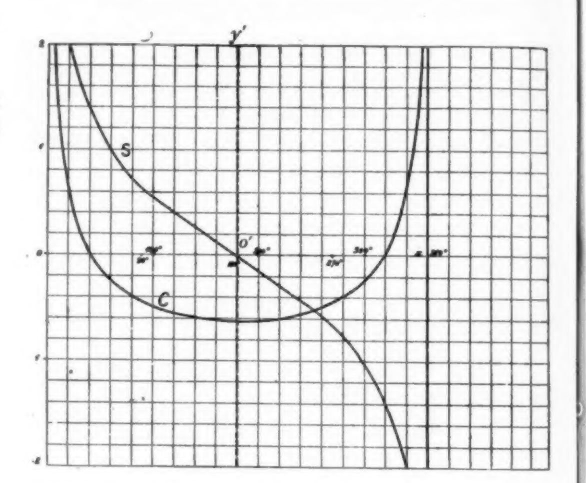


Fig. 15.

Courbes donnant
$$\left\{\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}};\\ C &= \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}, \end{aligned}\right.$$

x varie de 0 à 360°.
Les courbes sont périodiques et ont pour période 360°.

s'obtient donc en remplaçant la fonction $\mathcal{H}_0^{(2)}(kr)$ par la fonction

$$X + iY = \mathcal{H}_0^{(2)}(kr) + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\,\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-nkb\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}kb\sqrt{n}}}.$$

Calcul de la série :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-nkb\right)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}kb\sqrt{n}}}(-1)^n.$$

Posons $x = kb + \pi$ et désignons par $C(x)$ et $S(x)$ les

sommes des séries

$$C(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}, \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$X + iY = \mathcal{H}_0^{(2)}(kr) + \frac{1+i}{\sqrt{\frac{\pi}{2}kb}}[C(x) - iS(x)].$$

Les courbes $C(x)$ et $S(x)$ sont périodiques de période 2π. Elles ont été tracées pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2π; $C(x)$ est symétrique par rapport à $O'y'$ et $S(x)$ par rapport à O′ (voir *fig.* 15).

Coefficient de rayonnement. — Sous l'influence du courant créé par le champ électrique E régnant le long du fil, le fil rayonne de la puissance. Cette puissance est

$$\frac{1}{4}\mathcal{R}|I|^2 a$$

dans chaque direction de propagation possible.

Au bout d'un certain parcours dans le guide, cette puissance se transforme en la puissance due à une onde du type H_{01} dont E' est le vecteur électrique maximum.

Par définition, le coefficient de rayonnement est

$$R' = r' e^{i\varphi'} = \frac{E'}{E}.$$

On obtient la phase en écrivant que l'onde E' est en retard de phase de $\varphi_0 + \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{avec } \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{Y}{X}\right)$ sur l'onde circulant avec une vitesse normale dans le guide

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}.$$

L'amplitude s'obtient par application du principe de conservation de l'énergie

$$\frac{cE'^2 S k_z}{16\pi k} = \frac{1}{4}\mathcal{R}|I|^2 a$$

avec

$$|I| = \frac{E}{\sqrt{X^2+Y^2}\,\frac{\pi k}{c}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R} = \frac{\pi k}{c}X.$$

D'où

$$r'^2 = \frac{E'^2}{E^2} = \frac{4}{bk_z}\,\frac{X}{X^2+Y^2}.$$

Ce coefficient de rayonnement est aussi le coefficient de réflexion de l'obstacle constitué par le fil placé au milieu d'un guide terminé par son impédance caractéristique.

3. Impédance d'un fil placé dans un guide de longueur finie.

Soient R_1 et R_2 les coefficients de réflexion des deux obstacles terminant le guide, vus de O (*fig.* 16). Soit Z_0 l'impédance du fil dans un guide indéfini, et R' le coefficient de rayonnement.

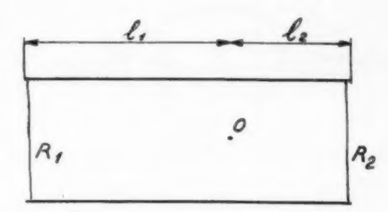


Fig. 16.

Si E_0 représente le champ électrique régnant le long du fil (donné lui-même par une série de réflexions comme il a été vu précédemment), le champ rayonné dans chaque sens est $R'E_0$ et, par suite, le champ électrique total est

$$E_0\left[1 + R'\,\frac{R_1 + R_2 + 2R_1R_2}{1 - R_1R_2}\right].$$

Le champ magnétique au voisinage du fil ne varie pas et, par suite, l'impédance du fil est

$$Z = Z_0\left[1 + R'\,\frac{R_1 + R_2 + 2R_1R_2}{1 - R_1R_2}\right].$$

CHAPITRE II.

Description de l'appareil employé pour la mesure des champs.

Les calculs précédents montrent que le champ électrique au voisinage du fil se déduit de la mesure du courant de haute fréquence circulant dans le fil.

On mesure la puissance dépensée dans le fil par effet Joule, en faisant passer le courant dans une soudure thermoélectrique dont on mesure la force électromotrice. Le couple est formé de deux fils de 3/100ᵉ de millimètre de diamètre, en alliage au nickel-aluminium BTE-CTE. La figure 17 montre la disposition de l'ensemble. Aα et αB représentent les fils du couple. AC et BD sont deux fils de cuivre de 3/10ᵉ de millimètre, reliant le couple aux deux parois opposées du guide. L'impédance du fil en

haute fréquence est la somme des impédances dues à chaque partie AC, AB et BD du fil.

Le contact en D se fait par l'intermédiaire d'un condensateur ayant une impédance négligeable devant celle du fil.

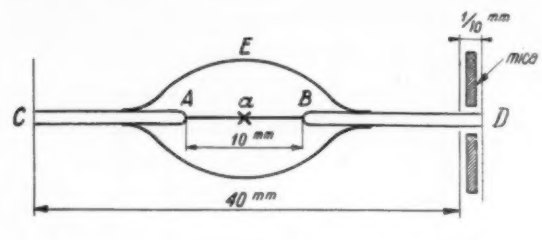


Fig. 17.

Une enveloppe de verre mince maintient le vide autour du couple. Nous négligeons l'influence du verre pour la mesure de la valeur absolue du champ

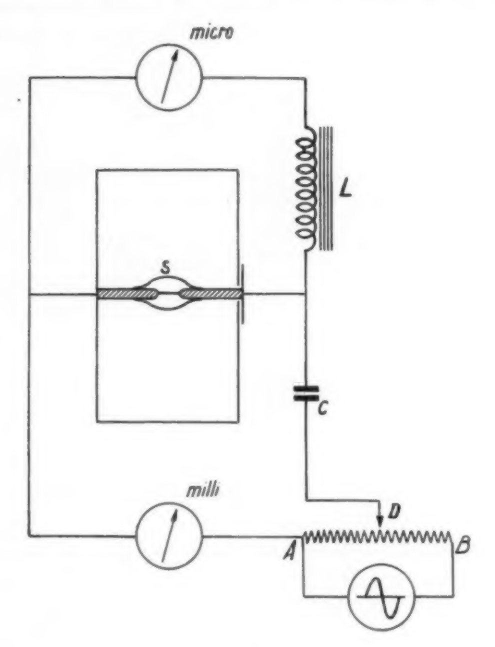


Fig. 18.

électrique. Le couple est étalonné en courant alternatif à 50 p. en utilisant le montage de la figure 18.

La tension alternative de 30 V est appliquée aux bornes A et B d'un potentiomètre de 2000 Ω. La différence de potentiel variable créée entre A et D est appliquée au couple par l'intermédiaire d'un condensateur de 24 μF et d'un milliampèremètre à courant alternatif.

Une grosse self L de 10 henrys et de 40 Ω de résistance est intercalée dans le circuit d'un galvanomètre faisant 8 Ω de résistance et qui mesure la force électromotrice.

La self L a pour but d'empêcher le courant alternatif de passer dans le circuit du galvanomètre.

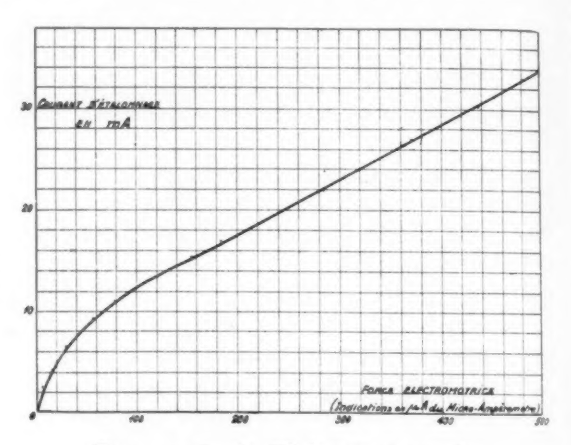


Fig. 19. — Courbe d'étalonnage du couple.

La résistance du couple étant de 11 Ω environ et l'impédance de la self de 3 000 Ω, le courant alternatif d'étalonnage passe, en totalité, dans la soudure.

La courbe de la figure 19 donne la relation qui lie le courant à 50 p. I_0 à la force électromotrice du couple mesurée par la déviation du galvanomètre.

Pour mesurer le courant de haute fréquence I, on mesure le courant I_0 qui produit le même échauffement du couple et, par suite, la même force électromotrice.

La puissance dépensée dans le fil en haute et basse fréquence est

$$P = R_0 I_0^2 = \frac{1}{2} R |I|^2.$$

Le calcul de $\frac{R}{R_0}$ ayant été indiqué, les calculs de l'impédance Z du fil permettent de déterminer le champ électrique au voisinage du fil en fonction de I_0.

Utilisation du couple.

Le couple construit suivant ces principes permet la mesure du champ électromagnétique qui règne à l'intérieur d'un guide. Ce procédé de mesure nous

a permis de construire différents appareils ayant pour but :

1° La mesure d'une longueur d'onde.

2° La mesure d'un champ électrique diffracté par l'ouverture d'un guide ou d'un cornet électromagnétique.

3° La mesure de la puissance émise par un émetteur et, par suite, la mesure de son rendement.

4° En général, la mesure des coefficients de réflexion d'une onde H_{01} circulant dans un guide rectangulaire sur des obstacles divers (réflexions par diffraction, par passage à travers un isolant, par changement de courbure de l'onde, etc.).

Nous étudierons successivement ces diverses applications.

CHAPITRE III.

Mesure de la longueur d'onde et du champ électrique d'une onde plane indéfinie.

L'ondemètre utilisé pour cette mesure est un petit élément de guide de section rectangulaire ayant pour longueur 32 cm et pour hauteur 17,5 cm. Il est fermé à une extrémité par un piston P réglable



Fig. 20. — Ondemètre.

et ouvert à l'autre extrémité par un petit cornet récepteur muni d'une fente étroite de 1 mm (voir *fig.* 20 et 21). Le couple AB est placé à 1 cm de la fente.

Il est relié à un petit galvanomètre extérieur fixé à l'ondemètre.

Supposons qu'un champ électrique E_0 parallèle au couple règne à l'extérieur du cornet. Désignons par R_1 et R_2 les coefficients de réflexion du piston et du système fente-cornet ramenés en AB.

Le champ électrique le long de AB est

$$E = E_0 \sqrt{1 - |R_2|^2}\, \frac{(1 + R_1)}{1 - R_1 R_2}.$$

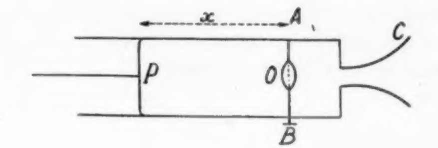


Fig. 21.

L'impédance du fil du couple est

$$Z = Z_0 \left[1 + R' \frac{1 + R_1 + R_2}{1 - R_1 R_2} \right].$$

La connaissance de R_1 et R_2 permet de mesurer E_0 en valeur absolue. En pratique, on fait varier la distance x du piston au couple AB.

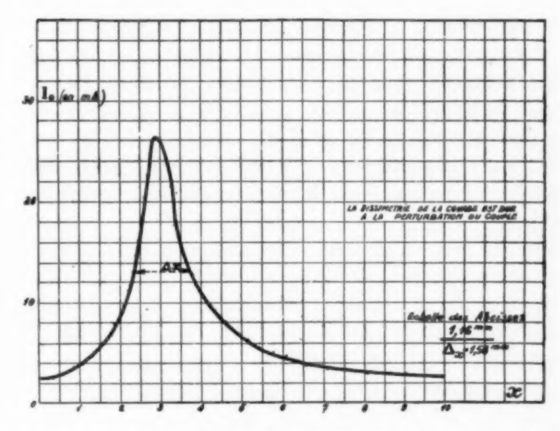


Fig. 22. — Courbe donnant les indications de l'ondemètre en fonction du déplacement x du piston. $\lambda = 27{,}84$ cm.

L'amplitude du champ E est alors de la forme

$$|E| = K \frac{\sin \frac{2\pi x}{\lambda'}}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda'} + \varphi\right)}}$$

où λ' est la longueur d'onde dans le guide et où $R_2 = re^{i\varphi}$.

La courbe donnant cette amplitude en fonction de x est montrée figure 22. Si r est voisin de 1,

les courbes sont très pointues et au voisinage des pointes de résonance sont à peu près représentées par l'équation

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{\lambda'}\Delta x}}.$$

Cherchons la distance Δx qui correspond des deux côtés d'une pointe de résonance à une valeur moitié du champ électrique maximum.

On a

$$\frac{1 + r^2 - 2r\cos\frac{2\pi\,\Delta x}{\lambda'}}{(1-r)^2} = (2)^2 = 4.$$

En remplaçant

$$\cos\frac{2\pi\,\Delta x}{\lambda'} \quad \text{par} \quad 1 - \frac{2\pi^2\,\Delta x^2}{\lambda'^2},$$

on a

$$\frac{4\pi^2\,\Delta x^2}{\lambda'^2} = \frac{3(1-r)^2}{r},$$

r étant voisin de 1

$$\frac{2\pi\,\Delta x}{\lambda'} = \sqrt{3}(1-r).$$

Prenons, par exemple, $r = 0{,}96$ et $\lambda' = 25$ cm On a $\Delta x = 3$ mm. La possibilité d'avoir des courbes très pointues permet de mesurer la longueur d'onde avec précision. En effet, la distance entre deux maximums est égale à la demi-longueur d'onde dans le guide λ'. On passe de λ' à λ par la formule

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 + \frac{\lambda'^2}{4b^2}}} \quad \text{avec } b = 17{,}5 \text{ cm}.$$

Précision de la mesure. — Le déplacement du piston P se fait à l'aide d'une vis à pas très court. L'expérience montre que chaque pointé du plan P peut se faire au 1/10e de millimètre. L'erreur absolue sur une demi-onde est

$$\frac{1}{2}\,d\lambda' = 0{,}02 \text{ cm}.$$

Le calcul donne

$$d\lambda = d\lambda'\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^3.$$

Par exemple,

$$\lambda = 25 \text{ cm}, \qquad \lambda' = 35 \text{ cm}.$$

$$d\lambda = 0{,}04\left(\frac{25}{35}\right)^2,$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}04}{25}\left(\frac{25}{35}\right)^3 \# \frac{1}{2000}.$$

L'erreur relative est égale à 1/2 000e.

Mesure du champ électrique d'une onde se propageant normalement au plan de l'ouverture de l'ondemètre.

Le courant I_0 du couple est proportionnel au champ électrique qui règne au voisinage de la surface de l'ouverture. Nous avons utilisé l'ondemètre pour mesurer de façon relative le champ électrique diffracté dans les deux cas suivants :

1° Mesure du diagramme horizontal de diffraction par l'ouverture d'un guide ou cornet rectangulaire parcouru par l'onde H_{01}.

2° Mesure d'un coefficient de transmission variable à l'extrémité d'un guide ou cornet rectangulaire.

Le principe de ces deux mesures sera indiqué ultérieurement.

CHAPITRE IV.

Mesure des coefficients de réflexion d'une onde H_{01} se propageant a l'intérieur d'un guide rectangulaire sur un obstacle de nature diverse.

L'étude de ces coefficients de réflexion peut se faire théoriquement dans la plupart des cas. Quant à la mesure pratique, elle se ramène à la mesure d'un champ électrique.

C'est ainsi que nous examinerons théoriquement, et déterminerons pratiquement, les coefficients de réflexion dus aux obstacles suivants :

1° Obstacle dû à la diffraction par une embouchure;

2° Obstacle dû au changement de diélectrique à l'intérieur du guide;

3° Obstacle dû à une fente placée dans un guide indéfini;

4° Obstacle dû au rayonnement d'un fil;

5° Obstacle dû au changement de courbure des surfaces d'onde;

6° Obstacle constitué par l'ensemble de deux ou plusieurs obstacles successifs présentés à la marche des ondes.

Les coefficients de réflexion sont supposés donnés par rapport à un plan bien défini qui est, en général, le plan de première discontinuité dans la propagation. Si r est le module du coefficient de réflexion, la puissance réfléchie est égale au produit de la puissance incidente par r^2.

Avant d'étudier les différents obstacles employés, nous décrirons le procédé mis en œuvre pour mesurer ces divers coefficients de réflexion.

Principe de la mesure. Description de l'appareil employé.

Le principe de la mesure est le suivant :

On fait tomber, sur l'origine d'un cornet collecteur, une onde à peu près plane et homogène provenant d'un émetteur d'ondes décimétriques. Celui-ci transforme cette onde en une onde H_{01} circulant

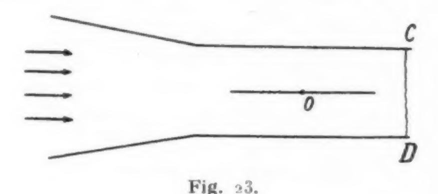


Fig. 23.

dans un guide rectangulaire (*fig.* 23). Cette onde se réfléchit sur l'obstacle CD. Un couple O, placé au milieu de la hauteur du guide et déplaçable longitudinalement. mesure le taux d'ondes stationnaires formé.

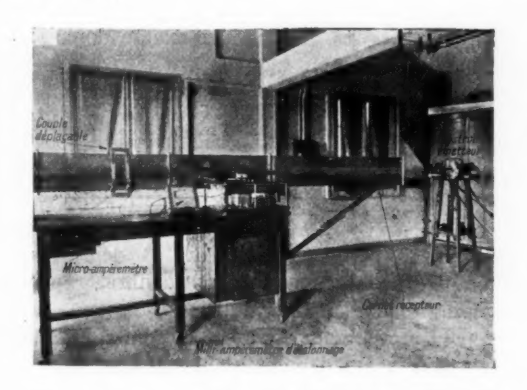


Fig. 24. — Appareil servant à mesurer les réflexions.

L'émetteur est, soit constitué par un magnétron couplé avec une cavité résonnante à très forte surtension et rayonnant par un cornet électromagnétique de 50 × 50 cm d'ouverture, soit constitué par une antenne accordée excitée par un tube à modulation de vitesse.

La figure 24′ indique le schéma de l'appareil dont une photo a été jointe au texte.

Le cornet récepteur est un cornet sectoral d'ouverture 60 × 30 cm, placé à 2 m de l'émetteur. Les guides employés sont de 30 × 4 cm. Nous supposerons que le cornet récepteur réalise à peu près l'impédance caractéristique. L'expérience et la théorie faites plus loin justifient cette approximation.

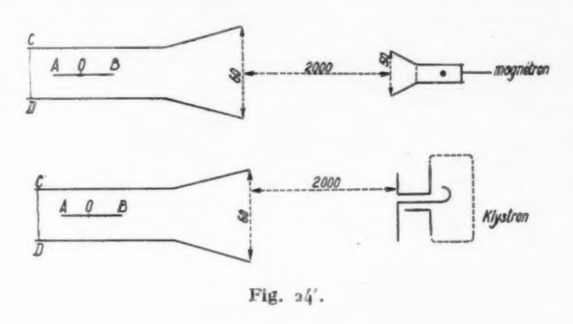


Fig. 24′.

Le couple se déplace le long de l'axe. Il est porté par deux glissières coulissant dans deux fentes longitudinales. Divers dispositifs permettent de tenir la fente constamment fermée et de lire exactement la position du couple sur une échelle graduée.

Il est relié à un galvanomètre extérieur et il a été étalonné au préalable suivant un dispositif qui a été indiqué.

Les courbes relevées pour chaque série d'expériences donnent I_0 (courant alternatif d'étalonnage) en fonction de z, distance du point O à une origine fixe du guide. Ces courbes, dont la figure 25 indique la forme générale et dont plusieurs exemples ont été joints au texte permettent de déterminer le coefficient de réflexion, La courbe (2) est la courbe de réflexion sur un obstacle composé d'une paroi conductrice placée dans le plan de CD. Désignons par E_0 le champ incident, par Z_0 l'impédance du fil dans un guide indéfini et par $R' = r' e^{i\varphi_0}$ le coefficient de rayonnement du couple.

Soit d la distance du plan de l'obstacle CD à l'origine fixe choisie et $R = re^{i\varphi}$ le coefficient de réflexion à mesurer.

Le champ le long du couple est

$$E_0[1 + R\, e^{-2ik_z(d+z)}].$$

L'impédance du fil est

$$Z_0[1 + RR'\, e^{-2ik_z(d+z)}].$$

On a donc

$$I_0 = \frac{E_0}{Z_0}\,\frac{1 + R\, e^{-2ik_z(d+z)}}{1 + RR'\, e^{-2ik_z(d+z)}},$$

$K = \dfrac{E_0}{Z_0}$ est indépendant de z.

Pour simplifier l'expression, on choisit comme origine un point situé à un nombre entier de demi-ondes de CD : $d = n\,\frac{\lambda'}{2}$, ce point étant déterminé en remplaçant l'obstacle CD par un plan conducteur.

Il correspond, dans ce cas, aux zéros de I_0.

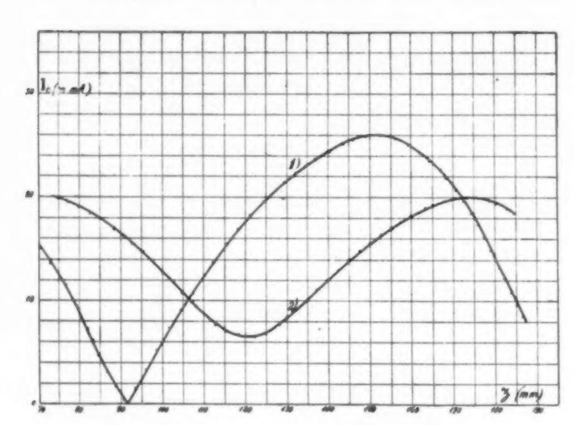


Fig. 25 *a*. — Courbes de réflexion.
1. Guide fermé $\lambda = 20{,}4$ cm.
2. Guide ouvert $\lambda' = 21{,}75$ cm.

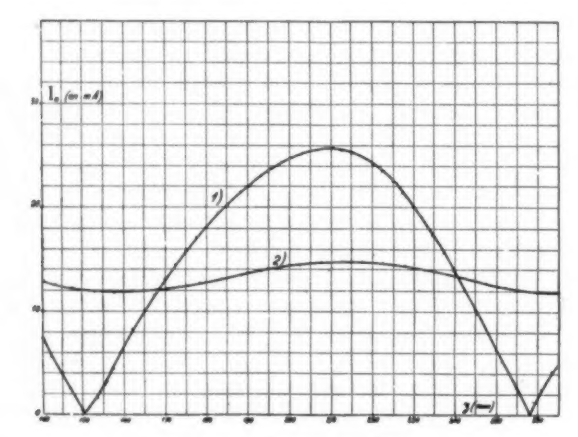


Fig. 25 *b*. — Courbes de réflexion.
1. Guide suivi du cornet récepteur fermé $\lambda = 20{,}35$ cm.
2. Guide suivi du cornet récepteur ouvert $\lambda' = 21{,}70$ cm.

On a alors

$$I_0^2 = K^2\,\frac{1 + r^2 - 2r\cos(2k_z z - \varphi + \pi)}{1 + r^2 r'^2 - 2rr'\cos(2k_z z - \varphi + \pi - \varphi_0)}.$$

Méthode approchée de la détermination de R.

Une méthode approchée, valable surtout si r est petit, consiste à négliger le terme r' qui représente la réaction du couple dans la mesure et qui est d'ailleurs assez petit. On détermine alors les valeurs I_m et I_M minimum et maximum et la position z_1, comptée positivement dans le sens de l'onde réfléchie, du minimum.

On a alors

$$I_m = K(1 - r), \qquad I_M = K(1 + r).$$

D'où l'équation

$$\frac{1 + r}{1 - r} = \frac{I_M}{I_m}$$

qui détermine r.

φ s'obtient en écrivant

$$2k_z z_1 - \varphi + \pi = 0,$$
$$\varphi = \pi + 2k_z z.$$

Il est alors inutile, pour faire cette mesure approchée, de tracer la courbe.

Détermination exacte de R.

Le calcul de la dérivée de I_0^2 montre que le minimum est, en réalité, obtenu pour

$$2k_z z_1 - \varphi + \pi = -\,\frac{(1 - r^2)\,r'\sin\varphi_0}{1 - r'\cos\varphi_0(1 + r^2)}.$$

On opère alors par approximations successives.

On adopte, pour r, la valeur approchée déjà trouvée.

φ prend alors une valeur plus exacte donnée par la formule précédente.

On a ensuite, en prenant deux valeurs de z,

$$\frac{1 + r^2 - 2r\cos(2k_z z' - \varphi + \pi)}{1 + r^2 - 2r\cos(2k_z z'' - \varphi + \pi)} = \frac{I_0'^2}{I_0''^2}\,\frac{1 + r^2 r'^2 - 2rr'\cos(2k_z z' - \varphi + \pi - \varphi_0)}{1 + r^2 r'^2 - 2rr'\cos(2k_z z'' - \varphi + \pi - \varphi_0)}.$$

On résout cette équation du 2e degré en r, en remplaçant, dans le second membre, r par sa valeur approchée et ainsi de suite.

On peut prendre pour point z' le point z_1 minimum et pour point z'' la valeur annulant $\cos(2k_z z'' - \varphi + \pi)$ à peu près à mi-chemin entre le maximum et le minimum.

Méthode de résolution graphique. — On peut, à partir des courbes donnant $I_0 = f(z)$, tracer les courbes

$$I_0^2 = f(u) \qquad \text{avec } u = \cos(2k_z z - \varphi + \pi).$$

Cette courbe (*fig.* 26) serait une droite s'il n'y avait pas le rayonnement du couple. On peut s'efforcer de tracer la droite théorique en prenant les milieux des points situés sur une même paral-

lèle à l'axe des I_0^2 et en traçant la droite la plus proche de la courbe obtenue. Cette droite nous donne ensuite r par les divers rapports :

$$\frac{1+r}{1-r} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{1+r^2}}{1-r} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r}.$$

Détermination de r' et φ_0. — Ces deux quantités ont été déjà calculées. On peut aussi les déterminer en mesurant la réflexion d'une onde H_{01} sur un fil analogue au couple. L'expérience est en bon accord avec le calcul. En outre, les courbes tracées en remplaçant les obstacles CD par des plans conducteurs doivent s'identifier avec la courbe

$$I_0 = \frac{K \sin 2k_z z}{\sqrt{1+r'^2 - 2r' \cos(2k_z z - \varphi_0)}}$$

obtenue en faisant $r = 1$, $\varphi = \pi$.

On a tracé cette courbe pour les valeurs théo-

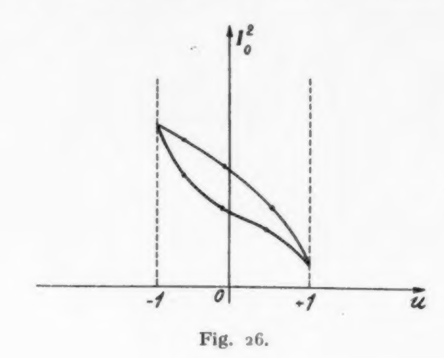


Fig. 26.

riques de r' et φ_0 du couple utilisé. Elle coïncide assez bien avec les courbes expérimentales.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES DIFFÉRENTS OBSTACLES PRÉSENTÉS A LA MARCHE DES ONDES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA DIFFRACTION PAR L'EMBOUCHURE D'UN GUIDE OU D'UN CORNET.

On sait que les ondes électromagnétiques tombant sur une fente ou débouchant d'une ouverture se diffractent dans l'espace environnant, c'est-à-dire que la fente ou l'ouverture agissent comme des sources d'énergie et propagent cette dernière dans tout l'espace. Le calcul du champ diffracté est extrêmement difficile. Durant ces dernières années, des formules en apparence satisfaisantes ont été données pour résoudre ce problème. Ce sont les formules de Kottler [1-1], [4-1], [7].

Formules de Kottler.

Elles sont basées sur le principe d'Huyghens et sur les équations de Maxwell.

1° Le champ diffracté par une embouchure ne dépend que de « sources » localisées sur la surface de l'embouchure.

2° Connaissant les « sources » d'un émetteur d'ondes, c'est-à-dire les charges et les courants électriques et éventuellement magnétiques en tout point de l'espace, on peut déterminer le champ rayonné par les formules de Lorentz.

Le calcul se base sur ces deux lois.

On choisit sur la surface de l'embouchure des densités fictives de charge et de courant électriques et magnétiques, de telle façon que leur rayonnement au voisinage de la surface émettrice établisse la continuité des champs à travers elle. Ces densités et, par suite, le champ diffracté, ne dépendent que des champs $\overline{E_s}$ et $\overline{H_s}$ régnant sur la surface de l'embouchure.

Les formules de Kottler sont les suivantes :

$$4\pi\overline{E_\rho} = \frac{1}{ik}\int_C \operatorname{grad}\psi(\overline{H}\,\overline{ds}) + \int_C \psi(\overline{E}\times\overline{ds}) + \iint_S \left(\psi\frac{d\overline{E}}{dn} - \overline{E}\frac{d\psi}{dn}\right) dS,$$

$$4\pi\overline{H_\rho} = -\frac{1}{ik}\int_C \operatorname{grad}\psi(\overline{E}\,\overline{ds}) + \int_C \psi(\overline{H}\times\overline{ds}) + \iint_S \left(\psi\frac{d\overline{H}}{dn} - \overline{H}\frac{d\psi}{dn}\right) dS,$$

dans lesquelles S est la surface de l'embouchure, (C) le contour de cette surface, $\vec{n}$ est la normale intérieure de S, ψ ayant la signification connue $\frac{e^{-ikr}}{r}$.

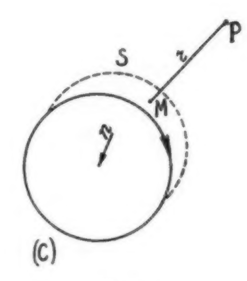


Fig. 27.

Enfin, les intégrales de contour sont prises dans le sens inverse (voir *fig.* 27).

En fait, les formules de Kottler ne sont surtout applicables que pour les points P à l'infini. La direction OP est définie par sa trace Op sur le plan de symétrie du cornet ou du miroir (en général le plan de l'embouchure) et par l'angle (Oz, OP) $= \theta$ (voir *fig.* 28).

On pose

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Op}) = \varphi, \qquad \widehat{POz} = \theta.$$

On prendra OP $= R$ très grand. Si x, y, z désignent les coordonnées d'un point de la surface S (en général $z = 0$), on aura

$$r = R - x\sin\theta\cos\varphi - y\sin\theta\sin\varphi - z\cos\theta,$$

$$\psi = \frac{e^{-ikR}}{R}\, e^{ik[x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta]}.$$

Les champs E_θ et E_φ seront calculés dans les axes P (θ, φ, r) de la figure 28. Les formules de Kottler satisfont aux équations de Maxwell, de par leur définition; on doit donc avoir, le point P

étant à l'infini

$$E_r = H_r = 0,$$
$$H_\varphi = E_\theta, \qquad H_\theta = -E_\varphi.$$

Ceci doit être vérifié à chaque exemple.

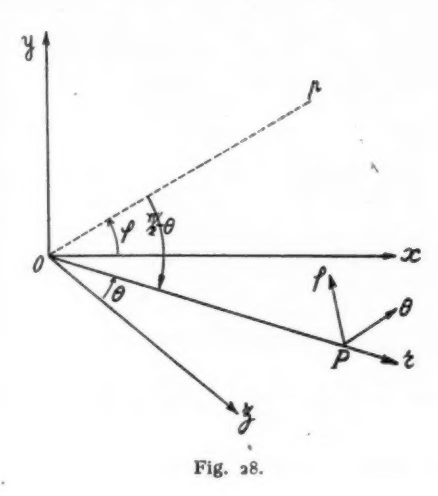


Fig. 28.

Le calcul de la puissance diffractée dans un cône ayant pour sommet l'ouverture (confondue en un point) et pour angle au sommet θ_0 est

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}T \iint_\Sigma \frac{c}{4\pi}(E_\theta^2 + E_\varphi^2)\,\mathrm{d}S,$$

Σ est la portion de sphère située à l'intérieur du cône pour laquelle on a,

$$\mathrm{d}S = R^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \qquad 0 < \varphi < 2\pi \qquad \text{et} \qquad 0 < \theta < \theta_0.$$

On choisit, dans le cas de la diffraction par une embouchure, pour les valeurs des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, les champs qui régneraient sur cette embouchure, si la propagation était illimitée. Dans le cas de l'onde diffractée par un miroir, on choisit comme champs générateurs les champs réfléchis sur la surface.

On verra ultérieurement ce que cette hypothèse présente d'aléatoire.

Nous avons fait le calcul du champ et de la puissance diffractée dans la plupart des cas pratiques (guides et cornets rectangulaires et circulaires, miroirs plans et paraboliques, cylindres). Nous avons montré, dans tous les cas, que, lorsque la longueur d'onde est petite devant les dimensions de l'embouchure ou du miroir, les champs diffractés satisfont au principe de conservation de l'énergie.

Nous indiquerons le résultat du calcul dans trois cas particuliers qui nous seront utiles par la suite.

I. — Calcul de l'onde diffractée par l'embouchure d'un guide rectangulaire parcouru par l'onde H_{01}.

On utilise, pour fixer les coordonnées du point courant de l'embouchure M, les axes Ox, Oy. On a [1-5], [4-2].

$$E_x = E_0 \cos\frac{\pi y}{b}\,U,$$
$$H_z = \frac{i}{k}\,\frac{\pi}{b}\,E_0 \sin\frac{\pi y}{b}\,U,$$
$$H_y = \frac{k_z}{k}\,E_x,$$
$$H_x = E_y = E_z = 0$$

avec

$$U = e^{i(\omega t - k_z z)} \qquad \text{et} \qquad k_z^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}.$$

On pose

$$A = \frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$B = \frac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi,$$
$$V = e^{i(\omega t - kR)}.$$

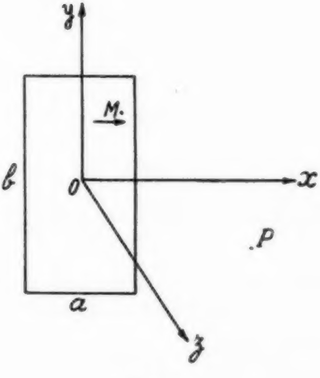


Fig. 29.

Le champ diffracté est alors donné par ses deux composantes

$$E_\varphi = -\frac{iE_0 ab}{2\pi^2 R}(k_z + k\cos\theta)\frac{\sin A}{A}\,\frac{\cos B}{1 - \frac{4B^2}{\pi^2}}\sin\varphi\,V,$$

$$E_\theta = -\frac{iE_0 ab}{2\pi^2 R}(k + k_z\cos\theta)\frac{\sin A}{A}\,\frac{\cos B}{1 - \frac{4B^2}{\pi^2}}\cos\varphi\,V.$$

Diagrammes.

1° *Diagramme vertical.* — Le champ est horizontal et ses zéros sont donnés par

$$\sin\theta = \frac{2p+1}{2}\,\frac{\lambda}{b} \qquad (p \geq 1).$$

2° *Diagramme horizontal.* — Le champ est horizontal et ses zéros sont donnés par

$$\sin\theta = n\frac{\lambda}{a} \qquad (n \geq 1).$$

Valeur maximum du champ :

$$E = \frac{E_0 S}{2\pi^2 R}(k + k_z).$$

Puissance diffractée.

Soit W' la puissance diffractée dans un cône d'angle égal à $\frac{\pi}{2}$ et W la puissance circulant dans le guide.

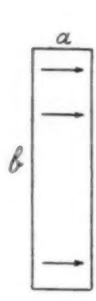


Fig. 30.

On pose

$$u = \frac{kb}{2}, \qquad v = \frac{ka}{2}, \qquad x = \frac{W'}{W}.$$

Le calcul de x peut se faire dans les divers cas suivants :

a. $u \to \infty$ ouverture très haute.
Le diagramme est horizontal.
On a $k_z = k$ et φ petit

$$A = v\sin\theta, \qquad B = u\sin\theta\varphi,$$

$$W' = \frac{c}{8\pi}\frac{E_0^2 a^2 b^2 k^2}{4\pi^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\frac{\sin^2 A}{A^2}\,d\theta \times \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)^2}\sin\theta\,d\varphi.$$

La deuxième intégrale se calcule par le changement de variable

$$t = u\sin\theta\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)^2}\sin\theta\,d\varphi = 4\int_0^{u\sin\theta}\frac{\cos^2 t}{\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^2}\frac{dt}{u}.$$

Cette intégrale tend vers

$$\frac{4}{u}\int_0^{\infty}\frac{\cos^2 t}{\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^2}\,dt.$$

Or,

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos^2 t}{\left(1-\frac{4t^2}{\pi^2}\right)^2}\,dt \quad \text{est égale à } \frac{\pi^3}{16}.$$

On en tire

$$W' = \frac{c}{8\pi}\frac{E_0^2 S}{4\pi}v\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\frac{\sin^2 A}{A^2}\,d\theta,$$

la puissance W étant égale à

$$W = \frac{cE_0^2 S}{16\pi},$$

on en déduit

$$x = \frac{W'}{W} = \frac{v}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\frac{\sin^2 A}{A^2}\,d\theta.$$

Nous achèverons le calcul dans deux cas particuliers :

1° $v \to \infty$ (ouverture très grande dans les deux sens). Avec le changement de variable

$$y = v\sin\theta,$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{v}\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{y^2}{v^2}}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{y^2}{v^2}}}\frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy,$$

$$x \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}4\frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy.$$

Or,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Il vient : $x \to 1$.

La puissance diffractée est égale à la puissance incidente. C'est un cas particulier d'un résultat qui a été établi pour d'autres formes de tuyaux.

2° $v \to 0$ ouverture très étroite.
On a

$$\frac{\sin A}{A} = 1$$

et par suite,

$$x = \frac{v}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\,d\theta,$$

$$x = 0{,}7v.$$

b. Cas général. — Dans le cas général, l'intégration de la puissance s'effectue par des déve-

loppements en série. Indiquons sommairement la marche du calcul qui est long, mais facile.

On a

$$W' = \frac{c}{8\pi}\frac{E_0^2 a^2 b^2}{4\pi^4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k_z + k\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta \times\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 A}{A^2}\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)^2}\sin^2\varphi\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(k + k_z\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta \times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 A}{A^2}\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)^2}\cos^2\varphi\,d\varphi\right]$$

On peut calculer ces intégrales de la façon suivante :

On développe $\frac{\sin^2 A}{A^2}$ et $\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)^2}$ en série (en faisant attention aux limites de convergence des séries obtenues).

Prenons le développement en série entière :

$$\frac{\sin^2 A}{A^2} = 1 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A^4 + \ldots,$$

$$\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)} = 1 + \beta_1 B^2 + \beta_2 B^4 + \ldots.$$

En remplaçant

$$A = u\sin\theta\cos\varphi, \qquad B = u\sin\theta\sin\varphi.$$

On obtient

$$\frac{\sin^2 A}{A^2}\frac{\cos^2 B}{\left(1-\frac{4B^2}{\pi^2}\right)^2} = \Sigma m_{p,q}\sin^{2p}\theta\sin^{2q}\varphi.$$

Les intégrations par rapport à φ donnent

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

On les intègre par la formule de Wallis

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Il reste à intégrer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k_z + k\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta\,\sin^{2q}\theta.$$

D'où deux sortes de termes

$$I_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\,d\theta$$

et

$$J_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}\theta\cos\theta\,d\theta.$$

J_{2p+1} s'intègre immédiatement

$$J_{2p+1} = \int_0^1 t^{2p+1}\,dt = \frac{1}{2p+2}.$$

I_{2p+1} est donné par la formule de Wallis

$$I_{2p+1} = \frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2p}{2p+1}.$$

Naturellement, dans le cas d'une fente étroite $\left(v \leqq \frac{\pi}{6} \text{ ou } a \leqq \frac{\lambda}{6}\right)$, on pourra toujours supposer

$$\frac{\sin^2 A}{A^2} = 1.$$

Le calcul, effectué de cette façon pour un guide de 30 cm de haut, pour une largeur variable de 0 à 4 cm et une longueur d'onde de 21,5 cm, donne

$$u = 4{,}4, \qquad 0 < v < 0{,}58.$$

On a trouvé

$$x = 0{,}66\,v$$

chiffre un peu inférieur au chiffre théorique $x = 0{,}7\,v$ trouvé dans le cas où u est infini.

Réflexion due à la diffraction.

Nous voyons, par ces exemples, que, dans le cas des guides de section finie, le calcul de la puissance diffractée dans des directions extérieures à la surface du guide indique qu'elle est inférieure à la puissance circulant dans le guide.

On est donc amené à penser qu'une partie de cette dernière puissance est réfléchie par l'embouchure. Le coefficient de réflexion dû à la diffraction a un module r donné par la relation

$$r^2 = 1 - x.$$

On verra plus loin que cette relation n'a pas été vérifiée par l'expérience. C'est qu'en effet l'onde réfléchie perturbe les conditions d'applications des formules de Kottler.

En effet, ces formules supposent que les champs qui règnent sur la surface de l'embouchure sont les

champs de la propagation indéfinie, alors, qu'en réalité, ils sont composés de la somme des champs incidents et réfléchis.

II. — Calcul du champ diffracté a l'extrémité d'un cornet sectoral parcouru par l'onde H_{01}.

On utilise les trois axes définis par la figure 31.

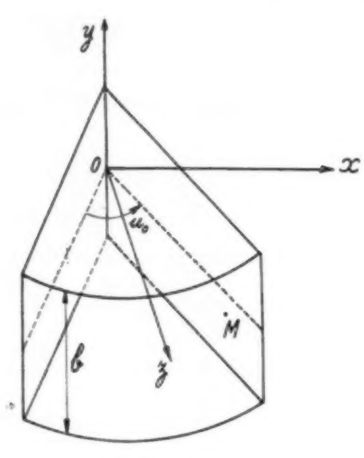


Fig. 31.

Les coordonnées semi-polaires d'un point courant M de l'embouchure étant

$$x = \rho_1 \sin u, \qquad z = \rho_1 \cos u, \qquad y = y$$

dans le cas d'un cornet divergent suivant la largeur, dont les lignes de force électriques sont des cercles centrés sur O*y*, les champs générateurs en M ont la valeur [2-2]

$$E_u = E_0 \cos \frac{\pi y}{b} \mathcal{H}_1^{(2)}(\alpha\rho_1)\, e^{i\omega t},$$

$$H_\rho = E_0 \frac{i}{k} \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \mathcal{H}_1^{(2)}(\alpha\rho_1)\, e^{i\omega t},$$

$$H_y = E_0 \frac{i}{k} \alpha \cos \frac{\pi y}{b} \mathcal{H}_0^{(2)}(\alpha\rho_1)\, e^{i\omega t},$$

avec

$$\alpha^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}.$$

On utilisera les notations suivantes :

$$A = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi,$$

$$B^2 = 1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi,$$

$$B \sin v = \sin\theta \cos\varphi,$$

$$B \cos v = \cos\theta,$$

$$C = \int_{-\frac{u_0}{2}}^{+\frac{u_0}{2}} \cos u \, e^{ik\rho_1 B \cos(u-v)}\, du,$$

$$S = \int_{-\frac{u_0}{2}}^{+\frac{u_0}{2}} \sin u \, e^{ik\rho_1 B \cos(u-v)}\, du,$$

$$T = \int_{-\frac{u_0}{2}}^{+\frac{u_0}{2}} e^{ik\rho_1 B \cos(u-v)}\, du.$$

On obtient alors

$$E_\varphi = \frac{iE_0 b \rho_1}{2\pi^2 R} \frac{\cos A}{1 - \frac{4A^2}{\pi^2}} \times [\alpha i \mathcal{H}_0^{(2)}(\alpha\rho_1) C + k \mathcal{H}_1^{(2)}(\alpha\rho_1) T \cos\theta] \sin\varphi V,$$

$$E_\theta = \frac{iE_0 b \rho_1}{2\pi^2 R} \frac{\cos A}{1 - \frac{4A^2}{\pi^2}} \times [\alpha i \mathcal{H}_0^{(2)} C \cos\theta \cos\varphi + b \mathcal{H}_1 T \cos\varphi - \alpha i \mathcal{H}_0 S \sin\theta] V.$$

Diagrammes.

1° *Diagramme horizontal.* — Le champ est horizontal. Il n'y a pas de zéro, mais des minimums obtenus en cherchant le minimum de $|E_\theta|$.

2° *Diagramme vertical.* — Le champ est horizontal. Les zéros sont obtenus pour

$$\sin\theta = \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{b}.$$

Cas particulier.

Si $\rho_1 \to \infty$ (pratiquement à partir de $\alpha\rho_1 \geqq 6$), et si $u_0 \to 0$ (pratiquement pour $u_0 \leqq 30°$), on trouve

$$C = u_0 \frac{\sin\left(k\rho_1 \frac{u_0}{2} \sin\theta \cos\varphi\right)}{k\rho_1 \frac{u_0}{2} \sin\theta \cos\varphi},$$

$$T = C, \qquad S = 0,$$

$$E_0 \mathcal{H}_1^{(2)}(\alpha\rho_1) = E_0 i \mathcal{H}_0^{(2)}(\alpha\rho_1) = E_M$$

(champ maximum sur l'embouchure).

Or, $\rho_1 u_0$ est la largeur a du cornet.

On conclut donc que, dans les conditions énoncées ($\alpha\rho_1 \geqq 6$ et $u_0 \leqq 30°$), le champ diffracté par l'embouchure du cornet sectoral est le même que le champ diffracté par l'embouchure d'un guide rectangulaire ayant mêmes dimensions et à l'intérieur duquel circule la même puissance.

Cette remarque nous permettra d'étudier le coefficient de réflexion de l'embouchure d'un guide

avec des largeurs progressivement croissantes en découpant par tranches successives un cornet sectoral convenablement choisi.

III. — Calcul du champ diffracté par réflexion d'une onde plane, homogène sur un miroir cylindrique a génératrices parallèles au champ électrique.

On utilise les axes définis par la figure 32. Les champs dus à l'onde plane incidente ont pour valeurs

$$\vec{E}\begin{cases} 0 \\ E_0\, e^{i(\omega t + kz)}, \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{H}\begin{cases} E_0\, e^{i(\omega t + kz)}, \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Soient a et b le diamètre et la hauteur du cylindre. En supposant que l'excitation soit répartie sur la face du cylindre qui fait front à l'onde incidente, on obtient la valeur suivante des champs électrique et magnétique diffractés :

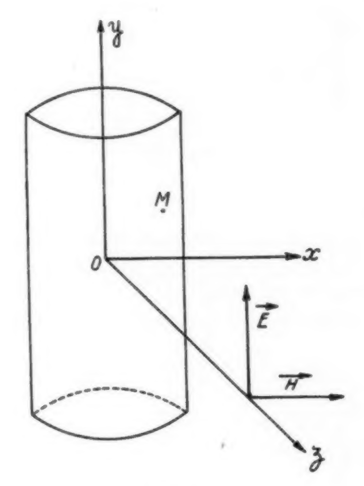


Fig. 32.

On pose

$$\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\varphi = B,$$

$$\frac{ka}{2}(1+\cos\theta) = u\cos v,$$

$$\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\varphi = u\sin v,$$

$$I = -\Omega_1(u) + iJ_1(u),$$

$$J = -2\,\frac{\sin(u\sin v)}{u},$$

Ω_1 étant la fonction de Veber [6-2].

On pose encore

$$C = I\cos v - J\sin v,$$

$$S = I\sin v + J\cos v.$$

Avec ces notations, on a

$$E_\varphi = \frac{-ikE_0ab}{8\pi R}\,\frac{\sin B}{B}\,[S\sin\theta + C(1+\cos\theta)\cos\varphi]V,$$

$$E_\theta = \frac{ikE_0ab}{8\pi R}\,\frac{\sin B}{B}\,C(1+\cos\theta)\sin\varphi V.$$

Diagrammes.

1° *Diagramme horizontal* $\varphi = 0$. — $E_\theta = 0$, le champ est vertical.

En remplaçant, on trouve

$$|E_\varphi| = \frac{kE_0ab}{8R}\sqrt{2(1+\cos\theta)} \times \sqrt{\Omega_1^2\left(\frac{ka}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\theta}\right) + J_1^2\left(\frac{ka}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\theta}\right)}.$$

L'amplitude du champ est une fonction décroissante de θ sans zéros.

2° *Diagramme vertical* $\varphi = \frac{\pi}{2}$. — On a $S = 0$, $E_\varphi = 0$. Le champ est encore vertical et ses zéros sont donnés par $\sin\theta = n\frac{\lambda}{b}$.

Valeur maximum du champ.

Elle est obtenue pour $\theta = 0$. Elle est égale à

$$E_M = \frac{kE_0ab}{4R}\sqrt{\Omega_1^2(ka) + J_1^2(ka)}.$$

Lorsque le produit

$$ka \to 0, \qquad J_1(ka) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \Omega_1(ka) \to \frac{2}{\pi},$$

de sorte que

$$E_M \to \frac{kE_0ab}{2\pi R}.$$

C'est la même formule que pour le miroir plan de même surface apparente.

Remarque. — Soit I le courant qui passe à travers une section du cylindre, et H_i et H les champs magnétiques incidents et diffractés au voisinage du miroir.

Le théorème d'Ampère donne

$$\frac{4\pi I}{c} = \int_{\widehat{BA}} H\,ds = \int_{\widehat{AB}} H_i\,ds = E_0 a.$$

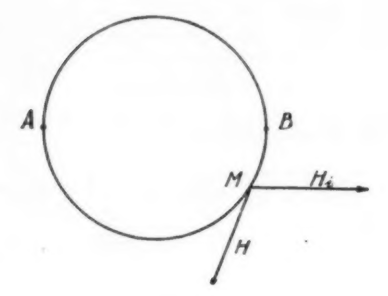


Fig. 33.

On en tire $E_M = \frac{2kbI}{cR}$ dans le cas d'un doublet de Hertz (*fig.* 34).

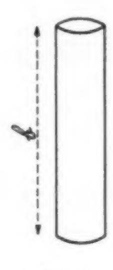


Fig. 34.

Or, le champ rayonné par un doublet de Hertz de hauteur *b*, parcouru par un courant *I* est

$$E_M = \frac{kbI}{cR}.$$

Nous avons trouvé un champ double. Cela est dû à ce qu'il faut prendre le travail du champ *H* non seulement sur la partie AM_1B face à l'onde incidente, mais aussi sur la partie AM_2B située dans l'ombre géométrique (*fig.* 35).

Le champ H_2 à considérer est opposé au champ H_1 puisque le doublet doit rayonner de la même façon et que les directions de propagation en M_1 et M_2 sont opposées. Le théorème d'Ampère donne

$$2E_0 a = \frac{4\pi I}{c}, \qquad E_M = \frac{kbI}{cR}.$$

On ne peut donc retrouver sur O*z* la formule du doublet, qu'à la condition de prendre, sur la surface de celui-ci, les champs existant réellement indépendamment de la notion de contour introduite par la notion d'ombre géométrique. Il en est de même pour les directions autres que O*z*.

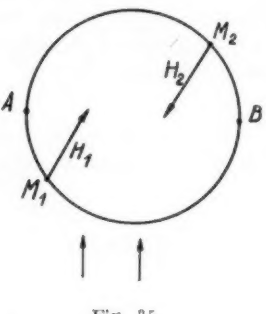


Fig. 35.

Coefficient de réflexion sur un cylindre mince d'une onde H_{01}. — Considérons un cylindre mince supposé placé dans le champ d'une onde H_{01} d'un guide rectangulaire terminé par l'impédance caractéristique.

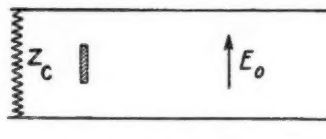


Fig. 36.

Cette onde est plane et homogène tout le long du cylindre. Le champ diffracté doit alors être donné par les formules précédentes. En particulier, le coefficient de réflexion, dû à ce champ diffracté dans la

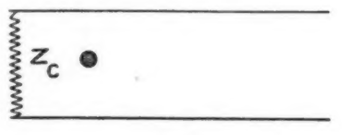


Fig. 37.

partie droite du guide (*fig.* 36 et 37) et transformé en champ d'une onde H_{01}, doit être proportionnel à *b*. En fonction de *b*, le module du coefficient de réflexion doit croître conformément au schéma de la figure 38 depuis la valeur o jusqu'à la valeur r_0 correspondant à la largeur du guide.

Or, si cette dernière est supérieure à $\frac{\lambda}{2}$, on constate expérimentalement l'existence d'une courbe analogue à celle de la figure 39 présentant plusieurs pointes correspondantes à des longueurs b égales à $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$.

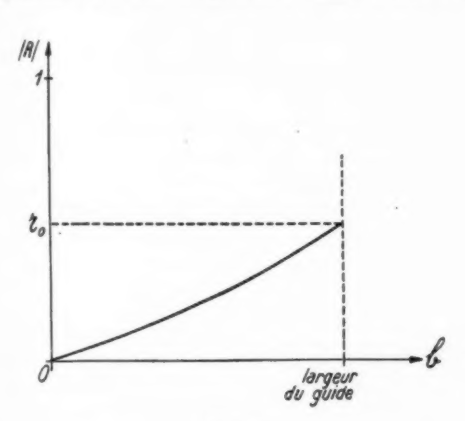


Fig. 38.

Ces pointes sont dues à l'existence d'une résonance du courant longitudinal du cylindre. Cette résonance entraîne l'existence d'un champ magnétique

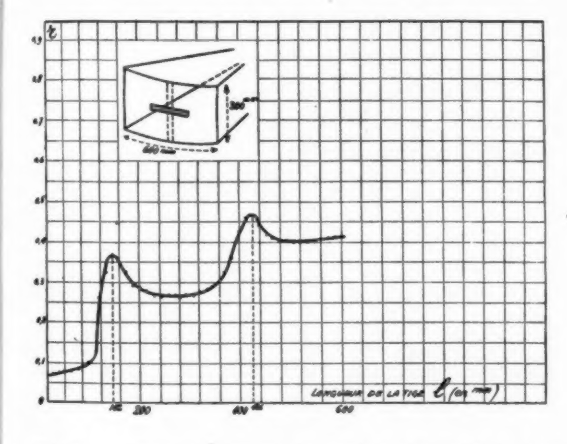


Fig. 39. — Courbe donnant le module du coefficient de réflexion sur une tige de 15^{mm} de diamètre en fonction de la longueur l de la tige. La réflexion parasite due à l'emploi du cornet n'a pas été compensée. $\lambda = 28,4$ cm.

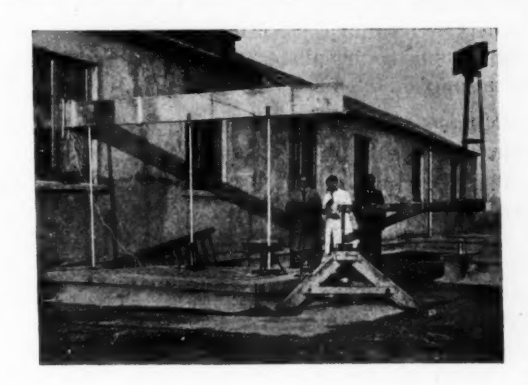
variable le long du cylindre, résultat qui ne peut être interprété dans les formules de Kottler puisque le champ incident est constant le long du cylindre de ce dernier.

Vérification expérimentale des formules de Kottler.

Nous venons de voir que les formules de Kottler ne peuvent pas être appliquées pour l'étude de la diffraction par de petits miroirs pour lesquels les formules du rayonnement conviennent mieux. Nous avons cherché à étudier le champ diffracté et la puissance diffractée par une embouchure afin de voir si elles satisfont aux formules de Kottler.

1. Étude du champ diffracté.

Nous avons, pour cela, utilisé le montage de la figure 40. Soit O l'ouverture rectangulaire embouchure d'un guide parcouru par l'onde H_{01}.



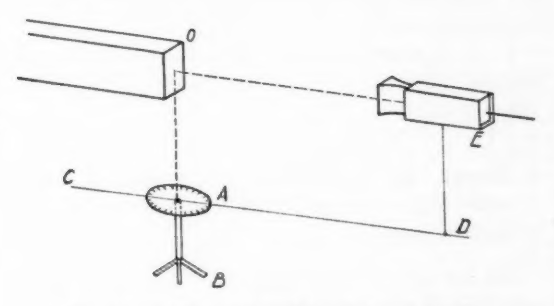


Fig. 40. — Dispositif expérimental pour l'étude du champ diffracté par une ouverture.

Une tige de bois CD horizontale est mobile autour d'un axe vertical passant par le centre de l'embouchure. Une tige verticale soutient l'ondemètre, décrit précédemment, dans un plan horizontal. Un cercle gradué axé sur l'axe vertical de O donne l'azimuth. L'ondemètre vise constamment le centre de l'ouverture de façon à ce que le plan de symétrie de l'ondemètre contienne ce dernier.

Dans ces conditions, l'ondemètre permet de tracer les divers diagrammes horizontaux, en particulier le diagramme du plan horizontal contenant le centre de l'embouchure.

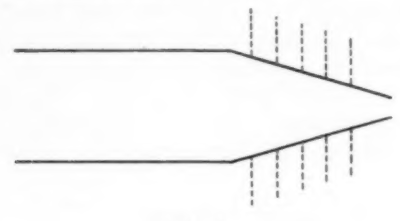


Fig. 41.

On a tracé celui-ci pour des fentes hautes de 30 cm et de largeur progressivement croissante de 0 à 4 cm. Ce dernier résultat a été atteint en coupant successivement un cornet allant en s'amincissant à partir de sa jonction avec le guide (*fig.* 41).

Résultats obtenus. — On a obtenu les résultats expérimentaux suivants :

1° Pour les petites fentes, le champ est constant dans un plan horizontal et indépendant de l'azimuth.

2° A partir de fentes égales au 1/10e de la longueur d'onde, le champ diminue lorsqu'on s'éloigne de l'axe de propagation. Cette diminution relative est d'autant plus sensible que la fente est grande.

3° Il semble que très près des parois extérieures le champ ait tendance à augmenter. Toutefois, cet effet peut être dû à la réflexion sur la surface de l'ondemètre.

4° A azimuth constant, les champs sont inversement proportionnels à la distance à l'embouchure.

2. Étude du coefficient de réflexion d'une onde H_{01} d'un guide rectangulaire sur son embouchure.

On sait que, si r est le module de ce coefficient de réflexion, la puissance diffractée est égale à $(1 - r^2)W$, W étant la puissance circulant dans le guide.

On a utilisé des ouvertures de hauteur assez grande allant de 30 à 120 cm et de largeur variable entre 0 et 50 cm en coupant, par des plans successifs, les deux cornets A et B des figures 42 et 43. Ces cornets sont assez peu divergents pour que la propagation à l'intérieur soit identique à la propagation à l'intérieur d'un guide. En outre, la diffraction à l'extrémité de ces cornets est identique à la diffraction par l'embouchure d'un guide de même section. Il existe, toutefois, un coefficient de réflexion au plan X de jonction avec le guide. On est alors dans le cas de deux obstacles en série, étudié plus loin. Il en résulte une perturbation du phénomène de

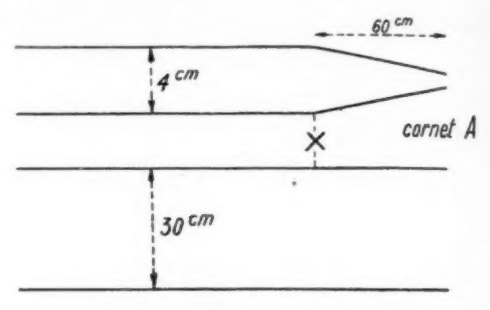


Fig. 42.

diffraction pure. Cela introduit l'existence de franges dans les courbes de diffraction tracées donnant le coefficient de réflexion en fonction de la largeur du guide.

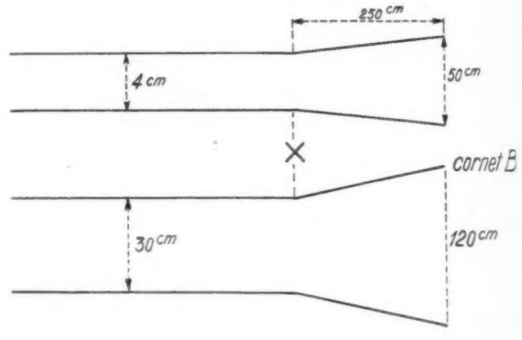


Fig. 43.

Les figures 44 et 45 donnent le module et la phase.

Le coefficient de réflexion du plan X sera calculé plus loin. Il est constant. Il est alors facile, comme on le verra dans l'étude de deux obstacles en série, de connaître le vrai coefficient de réflexion dû à l'embouchure et de tracer la courbe correspondante.

Les figures 46 et 47 donnent un exemple de courbes pour une longueur d'onde de 21,5 cm.

Le module décroît de 1 à 0, la phase varie de 0 jusqu'à une phase égale à π (toutefois mal déterminée) lorsque le côté a augmente.

En posant $u = \frac{\pi a}{\lambda}$, on peut tracer la courbe donnant $1 - r^2$ en fonction de u. On obtient la courbe C de la figure 48. D'autre part, en consi-

dérant les ouvertures de hauteur égale à 30 cm et de largeur comprise entre 0 et 4 cm, on a vu que.

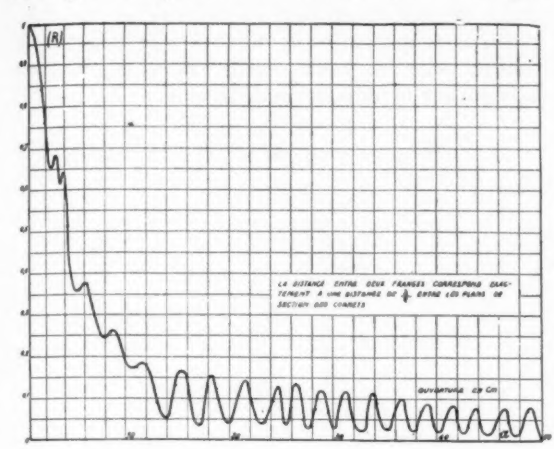


Fig. 44. — Courbe expérimentale donnant le module du coefficient de réflexion en fonction de la largeur des ouvertures des cornets A et B définis page 140. $\lambda = 21,5$ cm.

la courbe théorique C_1 est la droite donnée par la relation

$$x = 0.66\,u.$$

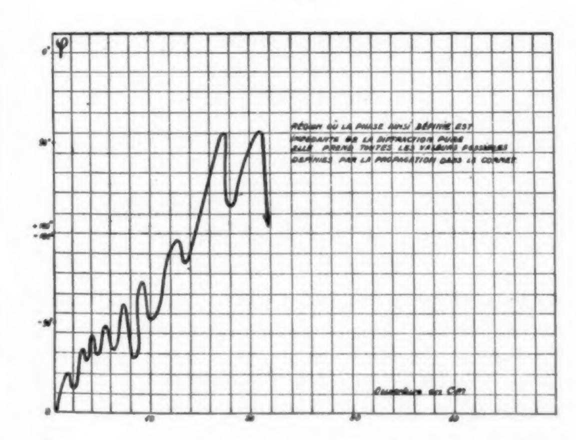


Fig. 45. — Courbe expérimentale donnant la phase du coefficient de réflexion, mesurée par rapport au plan de l'ouverture en fonction de la largeur de l'ouverture des cornets A et B définis page 140. $\lambda = 21,5$ cm.

On constate que cette dernière courbe est au-dessous de la première pour les faibles valeurs de u seules à considérer. Nous pouvons, cependant, envisager la puissance diffractée comme due, non seulement au champ E de l'onde incidente, mais au champ $E(1 + R)$ somme des champs incident et

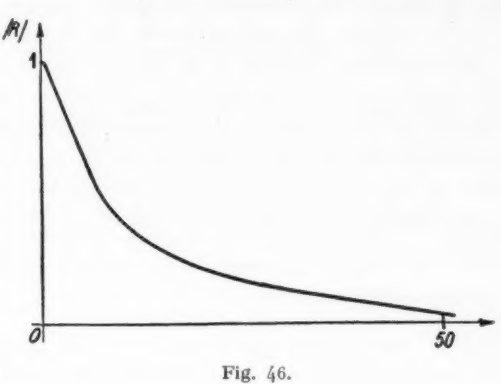


Fig. 46.

Fig. 47.

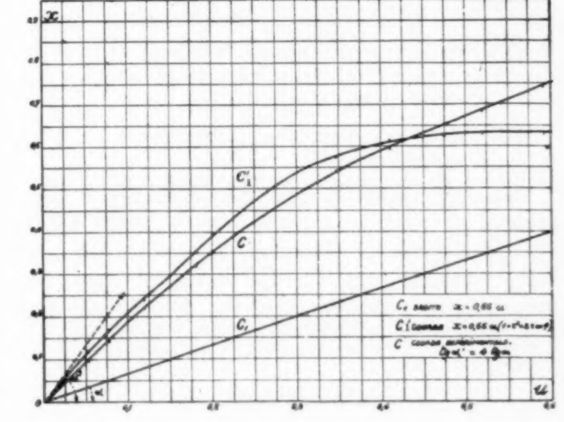


Fig. 48. — Courbes donnant $x = 1 - r^2$ en fonction du rapport

$$u = \frac{\pi a}{\lambda}.$$

réfléchi, ces deux champs étant supposés avoir les valeurs qu'ils auraient si la propagation était indé-

finie. Le rapport x' correspondant est

$$x' = 0{,}66\,u(1 + r^2 + 2r\cos\varphi).$$

$\cos\varphi$ étant positif, la courbe C'_1 qui donne x est au-dessus de C_1 et l'expérience montre que, dans sa première partie, elle est voisine de C. Ce résultat justifie le fait que les formules de Kottler doivent être appliquées à l'ensemble des champs incident et réfléchi. Toutefois, rien ne permet de prévoir que le champ réfléchi représente, sur l'ouverture, l'aspect du champ d'une onde H_{01}.

Justification des formules de Kottler. — Aucun des exemples précédents ne peut s'interpréter correctement par les formules de Kottler. Dans le cas d'une ouverture étroite, les formules de Kottler indiquent que le champ doit décroître comme $1 + \cos\theta$ alors que l'expérience montre que le champ reste constant dans le diagramme horizontal. De même, pour le calcul de la puissance, il faut tenir compte du champ réfléchi pour obtenir des résultats plus conformes à l'expérience. Les formules de Kottler sont donc applicables en remplaçant les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ de la propagation indéfinie par les champs $\vec{E'}$ et $\vec{H'}$ existant réellement dans le plan de l'embouchure. Comme, en général, on ne connaît pas la forme des champs $\vec{E'}$ et $\vec{H'}$, on doit en conclure que les formules de Kottler sont inutilisables puisque les champs générateurs $\vec{E'}$ et $\vec{H'}$ sont inconnus. Logiquement, le coefficient de réflexion n'étant nul que pour une ouverture infiniment grande, les formules ne sont valables que dans ce cas.

Mais alors ces formules s'identifient avec les formules de Kirchhoff.

Toutefois, dans le cas des ouvertures assez grandes (a et $b > 2\lambda$), l'onde réfléchie étant faible, elles permettent de déterminer la polarisation et la valeur absolue des champs diffractés avec une assez grande précision. Elles ne doivent pas être employées sans précaution pour de faibles ouvertures.

Origine de l'onde réfléchie. — L'onde réfléchie tire son origine de la discontinuité du courant à l'extrémité du guide. Une partie du courant se poursuit à l'extérieur et rayonne de la puissance dans l'air. Une autre partie revient dans le guide.

Cette onde réfléchie peut être considérée comme due à l'existence de sources localisées sur le contour de l'embouchure. Alors que les formules de Kottler ne considèrent que le rayonnement de sources fictives localisées sur la surface de l'embouchure, les intégrales de contour n'étant qu'un artifice mathématique, il faut ajouter à celles-ci une intégrale de contour due au rayonnement de sources réelles existant sur le bord même du contour.

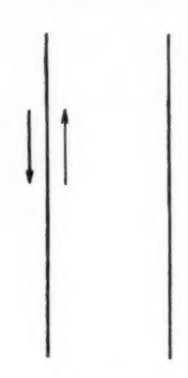


Fig. 49.

Cette source de rayonnement est relativement d'autant plus grande que la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions.

CHAPITRE II.

OBSTACLE DÛ AU CHANGEMENT DE DIÉLECTRIQUE A L'INTÉRIEUR DU GUIDE.

Considérons un guide terminé par l'impédance caractéristique Z_c et parcouru par une onde H_{01} circulant dans le sens de la flèche. Supposons qu'une partie de longueur l du guide (*fig.* 50) soit emplie d'un corps de constante diélectrique ε que nous supposerons d'abord non absorbant. Nous allons examiner, par le calcul et par l'expérience, le coefficient de réflexion dû à cette lame d'isolant.

Propagation dans un guide composé entièrement d'un tel isolant. Réflexion air-isolant.

L'onde H_{01} qui parcourt un tel guide (*fig.* 51) est identique à l'onde H_{01} qui parcourt le même guide empli d'air. Toutefois, la vitesse de propagation dans le diélectrique est différente et donnée

par l'équation [1-6]

$$k_z'^2 = \varepsilon k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}$$

au lieu de

$$k_z^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{b^2}.$$

Elle est donc plus petite dans un tel guide.

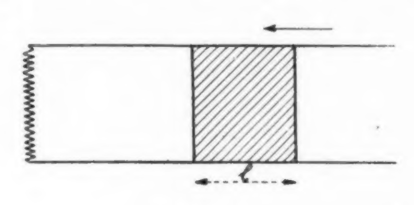


Fig. 50.

Cette constatation entraîne, sur le plan AB de la surface de séparation de deux milieux (air-isolant), l'existence d'une réflexion (*fig.* 52).

Le coefficient de réflexion correspondant peut, comme d'ailleurs nous le verrons dans d'autres exemples, se déterminer de deux façons :

1° Dans le cas de la réflexion d'une onde de l'air

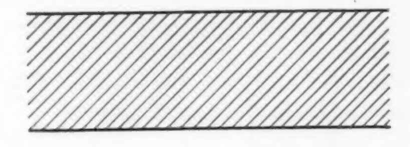


Fig. 51.

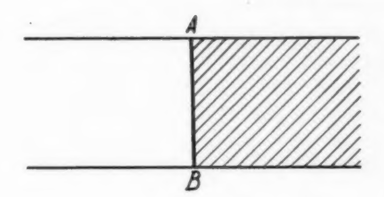


Fig. 52.

sur le plan de la surface isolante, considérons les trois sortes d'ondes circulant dans le guide :

Onde incidente.	Onde réfléchie.	Onde transmise.
$E_x = E_i \cos\frac{\pi y}{b}\, e^{i(\omega t - k_z z)}$	$E_x = E_r \cos\frac{\pi y}{b}\, e^{i(\omega t + k_z z)}$	$E_x = E_0 \cos\frac{\pi y}{b}\, e^{i(\omega t - k_z' z)}$
$H_y = \frac{k_z}{k} E_x$	$H_y = -\frac{k_z}{k} E_x$	$H_y = \frac{k_z'}{k} E_x$
$H_z = \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} E_i \sin\frac{\pi y}{b}\, e^{i(\omega t - k_z z)}$	$H_z = \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} E_r \sin\frac{\pi y}{b}\, e^{i(\omega t + k_z z)}$	$H_z = \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} E_0 \sin\frac{\pi y}{b}\, e^{i(\omega t - k_z' z)}$

Écrivons, dans le plan AB, la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques, d'où les deux équations

$$E_i + E_r = E_0,$$
$$k_z(E_i - E_r) = k_z' E_0.$$

Elles donnent le coefficient de réflexion

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{k_z - k_z'}{k_z + k_z'}.$$

On a donc

$$|R| = r = \frac{k_z' - k_z}{k_z' + k_z} \qquad \text{avec } \varphi = \pi.$$

En sens inverse on aurait de même

$$|R| = r = \frac{k_z' - k_z}{k_z' + k_z} \qquad \text{avec } \varphi = 0.$$

2° Au point de vue électrotechnique, le guide peut être assimilé à une ligne d'impédance caractéristique

$$Z_c = \frac{4\pi}{c}\,\frac{k}{k_z}\,a.$$

La partie contenant le diélectrique à une ligne d'impédance caractéristique

$$Z_c' = \frac{4\pi}{c}\,\frac{k}{k_z'}\,a.$$

Au raccord des deux lignes, on a donc une réflexion dont le coefficient de réflexion est

$$R = \frac{Z_c' - Z_c}{Z_c + Z_c'} = \frac{k_z - k_z'}{k_z + k_z'}.$$

Coefficient de réflexion sur une lame d'isolant.

Reprenons (*fig.* 53) une lame d'isolant placée dans un guide terminé par l'impédance caractéristique. Le calcul du coefficient de réflexion sur la lame et du coefficient de transmission se fait en

tenant compte de la série des réflexions entre A et A′. On a

$$R = -r\frac{1-e^{-2ik'_z l}}{1-r^2 e^{-2ik'_z l}},$$

$$T = \frac{(1-r^2)e^{-ik'_z l}}{1-r^2 e^{-2ik'_z l}},$$

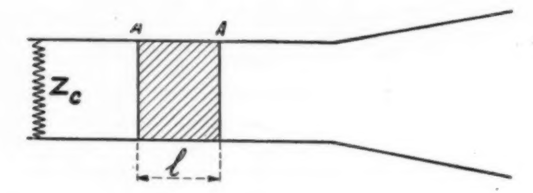


Fig. 53.

r étant le coefficient défini précédemment

$$r = \frac{k'_z - k_z}{k'_z + k_z} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda' + \lambda}$$

en désignant par λ' et λ les longueurs d'onde dans le guide plein d'isolant et dans le guide plein d'air, λ_0 désignant la longueur d'onde dans l'air.

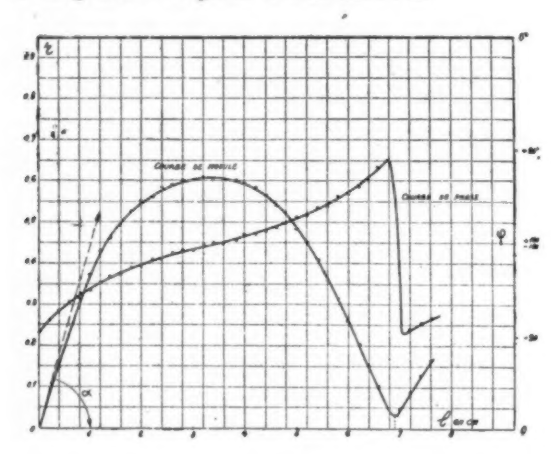


Fig. 54, 55 et 57. — Courbe donnant le module et la phase du coefficient de réflexion sur un bloc isolant d'épaisseur l. $\lambda_0 = 28{,}4$ cm. $\lambda = 32{,}2$ cm.

Posons

$$R = \rho\, e^{i\varphi} \qquad \text{et} \qquad |T| = t.$$

Un calcul simple donne

$$\rho = \frac{2r\sin(k'_z l)}{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos(2k'_z l)}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1-r^2}{1+r^2}\operatorname{cotg}k'_z l \qquad \text{avec } +\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

et

$$t = \frac{1-r^2}{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos(2k'_z l)}}.$$

On peut tracer les courbes donnant ρ, φ et t fonction de l. Ces courbes (*fig.* 54, 55 et 56) sont périodiques de période $\frac{\lambda'}{2}$.

Le maximum de la courbe de la figure 54 est

$$(1) \qquad \rho_M = \frac{2r}{1+r^2}.$$

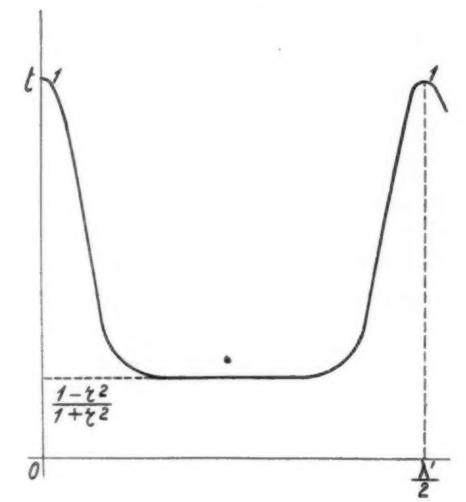


Fig. 56.

La tangente à l'origine est

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2rk'_z}{1-r^2},$$

en remplaçant, on trouve

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\pi(\varepsilon-1)\lambda}{\lambda_0^2}.$$

On a, en outre, les deux formules

$$(3) \qquad r = \frac{\lambda-\lambda'}{\lambda+\lambda'},$$

$$(4) \qquad \varepsilon = \frac{\lambda_0^2}{\lambda'^2}\left(1+\frac{\lambda'^2}{4b^2}\right).$$

Cas où la lame d'isolant est absorbante. — Soit γ le coefficient d'amortissement. On obtient les nouvelles formules en multipliant $e^{-2ik'_z l}$ par la valeur $x = e^{-2\gamma l}$.

On a

$$\rho' = \sqrt{\frac{1 + x^2 - 2x\cos 2k'_z l}{1 + r^4 x^2 - 2r^2 x \cos 2k'_z l}},$$

$$t' = \frac{(1 - r^2)\sqrt{x}}{\sqrt{1 + r^4 x^2 - 2r^2 x \cos 2k'_z l}}.$$

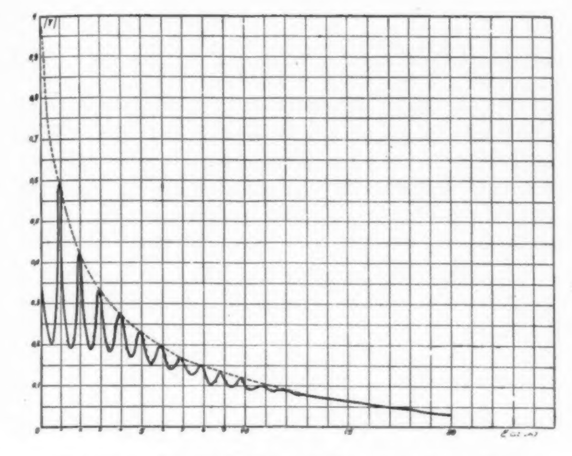


Fig. 58. — Courbe de transmission d'une lame d'eau.
(Toutes les corrections ont été faites.)
$\lambda_0 = 21{,}9$ cm. $\lambda = 29{,}7$ cm. Échelle : 1 cm → 1,25 cm.
Courbe en trait gras : courbe de transmission.
Courbe en trait pointillé : courbe des maximums.

On obtient les courbes des figures 57 et 58.

Les formules (2), (3) et (4) établies précédemment sont encore valables. Posons

$$x_1 = e^{-\gamma\frac{\lambda'}{2}}.$$

La formule (1) devient

$$(1') \qquad \rho_M = r\,\frac{1 + x_1}{1 + r^2 x_1}.$$

Enfin, les maximums de t' ne sont plus égaux à 1. On a, par exemple,

$$(5) \qquad t'_1 = \frac{(1 - r^2)x_1}{1 - r^2 x_1^2}.$$

Applications. — Mesure de la constante diélectrique et du coefficient d'amortissement. Le tracé des courbes donne facilement les valeurs de λ'. Il suffit de relever les minimums de la figure 57 ou les maximums de la figure 58.

λ_0 et λ étant deux données, les formules (2) et (4) donnent alors la valeur de ε.

La valeur de γ (ou de x_1) est donnée par les formules (1') ou (5).

La mesure du coefficient de réflexion (courbes 55 et 57) se fait par le procédé général déjà expliqué.

La mesure du coefficient de transmission (*fig.* 58) se fait en déterminant le champ par un couple fixe placé dans le guide après le bloc d'isolant. On peut la faire aussi en mesurant, à l'aide de l'ondemètre, le champ diffracté par l'extrémité du guide, comme nous l'avons vu précédemment. Toutefois, l'ondemètre reste alors fixe; ses indications, après étalonnage du couple, sont proportionnelles au coefficient de transmission.

Mode opératoire. — Pour un solide, il suffit de couper des lamelles d'épaisseur choisie ayant pour surface la surface intérieure du guide. On peut mettre ces lamelles les unes sur les autres sans se préoccuper des minces lames d'air existant entre elles car la longueur d'onde dans la lame d'air est relativement grande et, par suite, les réflexions éventuelles négligeables.

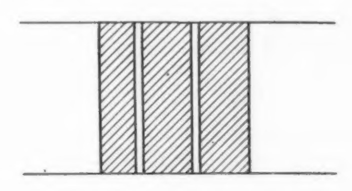


Fig. 59.

Pour un liquide, il faut placer le guide vertical et faire couler le liquide dans un bac, selon le schéma de la figure 60). La paroi inférieure du bac doit être choisie très mince pour éviter une réflexion parasite. On peut aussi placer à une distance convenable un correcteur ou une paroi de verre identique pour annuler cette réflexion, selon un processus que nous verrons ultérieurement.

Résultats obtenus. — On a tracé les courbes de réflexion sur la bakélite et la courbe de transmission de l'eau.

1° Pour la bakélite, la longueur d'onde dans l'air employée est $\lambda_0 = 28{,}4$ cm.

Avec le guide utilisé ($b = 30$ cm), on a $\lambda = 32{,}2$ cm.

L'examen des courbes, qui sont conformes à la théorie, donne

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}45,$$

$$\frac{\lambda'}{2} = 6{,}82,$$

$$\rho_M = 0{,}61.$$

Les deux premières mesures donnent ε

$$a. \qquad \varepsilon - 1 = \operatorname{tg}\alpha \, \frac{\lambda_0^2}{\pi\lambda} = 0{,}45 \, \frac{28{,}4^2}{\pi . 32{,}2} = 3{,}6,$$

soit

$$\varepsilon = 4{,}6.$$

$$b. \; \varepsilon = \frac{\lambda_0^2}{\lambda'^2}\left(1 + \frac{\lambda'^2}{4b^2}\right) = \left(\frac{28{,}4}{13{,}64}\right)^2 \left[1 + \frac{(13{,}64)^2}{4 \times 900}\right] = 4{,}55.$$

Ces deux valeurs de ε sont très voisines et correspondent avec les valeurs de la constante diélectrique de la bakélite à fréquence élevée.

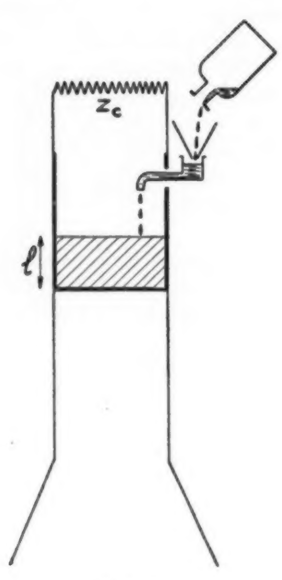


Fig. 60.

La dernière mesure donne le coefficient d'amortissement γ.

On a, en effet,

$$r = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'} = \frac{32{,}2 - 13{,}64}{32{,}2 + 13{,}64} = 0{,}405.$$

L'équation

$$0{,}61 = \rho_m = 0{,}405 \, \frac{1 + x}{1 + (0{,}405)^2 x^2}$$

donne

$$x = 0{,}66.$$

On a alors

$$-\gamma . 6{,}82 = \operatorname{Log} 0{,}66,$$

$$\gamma = \frac{\operatorname{Log}\dfrac{1}{0{,}66}}{6{,}82} = 0{,}06.$$

L'amortissement est de 6 %.

2° Pour l'eau, la courbe de transmission a été construite à partir de tuyaux ayant une dimension $b = 16$ cm. La longueur d'onde employée est $\lambda_0 = 21{,}9$ cm. La hauteur de l'eau est mesurée par le volume du liquide introduit par une pipette graduée.

La courbe de transmission (*fig.* 58) permet de définir avec exactitude une dizaine de franges et donne, à 1/1000[e] près,

$$\lambda' = 2{,}440 \text{ cm}.$$

La longueur d'onde dans le guide empli d'air est

$$\lambda = 29{,}7 \text{ cm}.$$

La formule (3) donne

$$r = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'} = \frac{29{,}7 - 2{,}44}{29{,}7 + 2{,}44} = 0{,}85.$$

a. Détermination de ε. — La formule (4) donne

$$\varepsilon = \left(\frac{21{,}9}{2{,}44}\right)^2 + \frac{(21{,}9)^2}{4(16)^2} = 80{,}95.$$

La précision sur ε est de l'ordre de 1/1000[e].

b. Détermination de γ. — La formule (5) donne, pour les maximums d'ordre n,

$$(5) \qquad t'_n = \frac{(1 - r^2)x_1^n}{1 - r^2 x_1^{2n}} = \frac{0{,}28 \, x_1^n}{1 - 0{,}72 \, x_1^{2n}}.$$

Le tableau des valeurs de x_1^n obtenu en résolvant les n équations du 2[e] degré que donne la formule (5) appliquée à la courbe expérimentale est le suivant :

n......	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
x_1^n.......	0,89	0,80	0,735	0,665	0,60	0,54	0,49	0.44	0,39	0,36	0,32	0,28	0,26
$-\log x_1^n$..	0,05	0,095	0,134	0,177	0,22	0,268	0,315	0,360	0,410	0,445	0,505	0,55	0,585

On peut placer, sur un graphique, les valeurs de la quantité $-\log x''_1$ données par l'expérience. Les points obtenus sont à peu près sur une ligne droite passant par l'origine. La pente de cette droite (*fig.* 58 *bis*) donne pour γ la valeur

$$\gamma = 0{,}086.$$

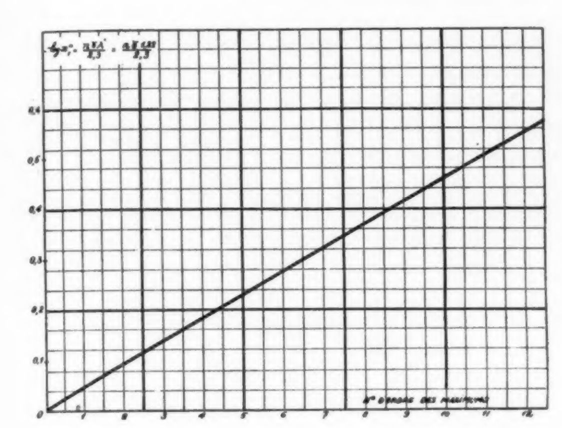


Fig. 58 *bis*. — Courbe donnant la valeur de $-\log_{10} x''_1$ égal à $\frac{n\gamma\lambda'}{2{,}3\times 2}$ en fonction du numéro n des maximums.

On peut, à partir de cette valeur de γ, calculer le terme correctif apporté à la détermination de ε par la présence de l'amortissement. La formule (4) devient, en effet,

$$(4') \qquad \varepsilon = \frac{\lambda_0^2}{\lambda'^2} + \frac{\lambda_0^2}{4b^2} - \left(\frac{\lambda_0\gamma}{2\pi}\right)^2.$$

Le terme correctif est égal à 0,1 et la valeur de ε plus exacte est donc

$$\varepsilon = 80{,}85.$$

On peut aussi calculer la résistivité de l'eau qui, par pertes ohmiques, donnerait ce coefficient d'amortissement. Elle est donnée par la formule

$$\rho = \frac{60\pi}{\gamma}\frac{\lambda'}{\lambda_0} \text{ ohms.}$$

On trouve, pour l'eau utilisée,

$$\rho = 240 \text{ ohms.}$$

On a mesuré la résistivité de cette eau à basse fréquence (800 p/sec).

On a trouvé

$$\rho_0 = 80\,000 \text{ ohms.}$$

La grosse différence trouvée entre ces deux mesures vient du fait que l'amortissement n'est pas dû aux pertes ohmiques seules, mais à des phénomènes moléculaires.

c. L'examen de la courbe 58 montre, qu'avec un amortissement aussi grand que celui de l'eau employée, les franges disparaissent au bout d'une vingtaine de centimètres de hauteur d'eau. Le coefficient de réflexion de l'onde incidente sur la lame d'eau doit alors être égal à r, coefficient de réflexion sur la première face d'entrée de l'isolant; la mesure de r a ainsi été faite. On constate, qu'à partir du moment où les franges disparaissent, le coefficient de réflexion sur le bloc d'isolant reste constant. La mesure a donné $r = 0{,}85$ en concordance avec la valeur théorique à moins de 1/100ᵉ près.

CHAPITRE III.

Obstacle constitué par une plaque conductrice percée d'un trou et intercalée dans un guide.

Considérons, à l'intérieur d'un guide terminé par l'impédance caractéristique, une plaque conductrice percée d'un trou dont le plan est perpendiculaire à l'axe du guide. Cette plaque provoque une réflexion qui dépend de la forme et de la largeur du trou. Nous avons fait l'étude théorique de l'obstacle intercalé dont celui-ci constitue un cas particulier. Deux théorèmes importants sont à la base de cette étude.

1° *Théorème de conservation de l'énergie.* — Il se traduit, lorsque l'obstacle n'absorbe pas d'énergie, par la relation

$$(1) \qquad |R|^2 + |T|^2 = 1$$

si R et T représentent respectivement le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission.

2° *Théorème de réciprocité.* — Ce théorème, démontré par nous [1], peut s'énoncer de la façon suivante :

Considérons deux guides séparés l'un de l'autre par des obstacles de nature quelconque pouvant contenir des résistances ohmiques ou la propagation éventuelle des ondes dans l'atmosphère. Lorsque chacun des guides fonctionne alternativement comme

[1] *Voir C. R. Acad. Sc.*, Note de MM. Gutton et Ortusi. Sur le théorème de réciprocité, 27 décembre 1943.

émetteur ou comme récepteur, le coefficient de transmission (en module et en argument) à travers l'autre guide reste le même dans les deux sens.

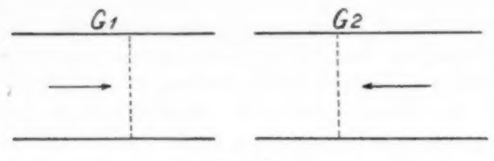


Fig. 61.

Considérons alors (*fig.* 62) un obstacle passif (n'absorbant pas d'énergie), intercalé dans un guide. Soit T le coefficient de transmission commun pour deux ondes venant des deux côtés du guide indéfini (théorème de réciprocité). Ce coefficient est indépendant du plan de référence. Le théorème de conservation de l'énergie donne, pour les coefficients de réflexions correspondants R et R', la relation

$$|R|^2 = |R'|^2 = 1 - |T|^2. \tag{1}$$

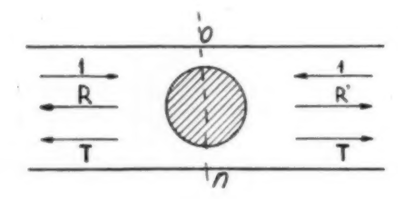


Fig. 62.

Comme les arguments varient de façon opposée lorsqu'on change le plan de référence, il existe, forcément, un plan et un seul pour lequel $R = R'$. Ce plan est le plan de symétrie électromagnétique de l'obstacle.

Ce plan là étant pris dorénavant pour plan de référence, la considération de l'énergie circulant dans chaque partie du guide dans le cas de la figure 62 donne

$$1 = |R + T|^2 \tag{2}$$

et comme $|R|^2 + |T|^2 = 1$, on en tire le résultat suivant :

R et T sont en quadrature.

En conclusion, nous pouvons donc poser, pour un obstacle intercalé passif de nature quelconque, dont le plan de référence est le plan de symétrie électromagnétique

$$\left\{\begin{array}{l} R = \cos u\, e^{i\varphi}, \\ T = i \sin u\, e^{i\varphi}, \end{array}\right. \tag{3}$$

u est un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; φ est un angle compris entre 0 et 2π. C'est l'argument du coefficient de réflexion.

Cas particulier. — Obstacle mince, rayonnant de façon symétrique.

Considérons (*fig.* 63) un obstacle de dimension longitudinale très petite devant la longueur d'onde et rayonnant de façon identique dans les deux parties du guide. C'est le cas d'un trou percé dans une plaque conductrice par exemple, ou d'un fil conducteur reliant les deux faces du guide puisque l'obstacle possède la symétrie mécanique. Le plan de référence coïncide avec le plan de l'obstacle.

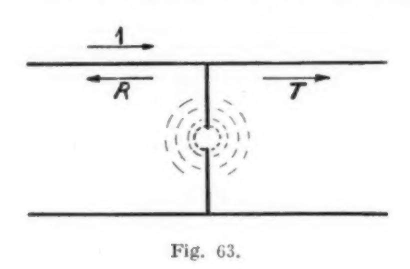


Fig. 63.

En écrivant l'identité des ondes rayonnées des deux côtés de l'obstacle, nous obtenons la relation supplémentaire caractéristique de cette sorte d'obstacle :

$$T = 1 + R. \tag{4}$$

L'équation (4), portée dans les formules (3), donne alors les formules

$$\left\{\begin{array}{l} R = \cos u\, e^{i(\pi+u)}, \\ T = i \sin u\, e^{i(\pi+u)} \qquad \text{où } \varphi = \pi + u. \end{array}\right. \tag{5}$$

Diagramme vectoriel du coefficient de réflexion.

La formule (5) montre que l'extrémité du vecteur représentatif du coefficient de réflexion décrit, lorsque u varie, un cercle de diamètre OA où A est le point d'abscisse -1. Si u est positif, le point M se trouve en dessous de l'axe Ox, s'il est négatif, il se trouve au-dessus.

Analogie électrotechnique. — L'obstacle précédent est identique, au point de vue du coefficient de réflexion, à une impédance imaginaire pure $Z = iZ_c v$ placée en dérivation entre deux points A et B d'une ligne indéfinie. En effet, les relations caractéris-

tiques (1), (2) et (4) sont encore vérifiées dans le cas de la figure 65 où (4) représente la conservation des tensions entre A et B. On peut vérifier les formules (5) en remplaçant Z par sa valeur $iZ_c v$ dans la relation connue

$$R = \frac{Z' - Z_c}{Z' + Z_c} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_c}.$$

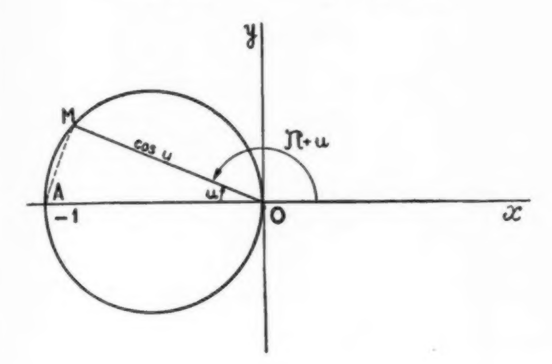


Fig. 64.

On trouve

$$Z' = \frac{iv}{1 + iv} Z_c,$$

$$R = \frac{-1}{1 + 2iv} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 4v^2}} e^{-i \operatorname{arc\,tg} 2v}.$$

Fig. 65.

Les formules (5) sont alors vérifiées en prenant

$$v = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} u.$$

Il en résulte que l'obstacle correspond à une self placée en dérivation si u est négatif et à une capacité si u est positif.

Étude expérimentale de ces types d'obstacles.

A cause de leur grande utilité pratique, nous avons fait l'étude expérimentale de trois cas particuliers importants :

1° Nous avons pris d'abord une plaque conductrice percée d'une fente de largeur e perpendiculaire au champ électrique. L'expérience montre que,

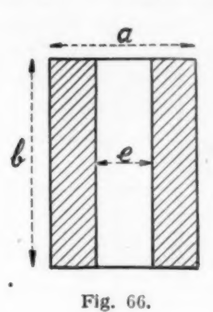


Fig. 66.

lorsque e varie de 0 à 4 cm (largeur du guide), le module de R varie de 1 à 0 (*fig.* 66 *bis*) et le

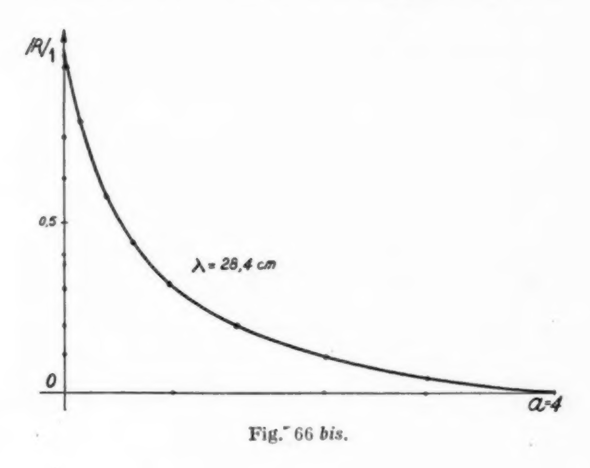


Fig. 66 *bis*.

diagramme du coefficient de réflexion coïncide, à de faibles erreurs d'expérience près, avec la partie inférieure du cercle de la figure 68 (partie pointillée). La fente fonctionne comme une capacité.

2° Nous avons pris ensuite une plaque conductrice percée d'une fente de largeur e' parallèle au champ électrique.

On voit que le module du coefficient de réflexion ne décroît que pour des largeurs de fente notablement plus grandes que dans le cas précédent. Le diagramme du coefficient de réflexion coïncide avec la partie supérieure du cercle de la figure 68 (partie en trait plein). La fente fonctionne comme une self.

3° Nous avons pris, enfin, l'obstacle formé par une tige cylindrique de 2 mm d'épaisseur que l'on enfonce au milieu du guide parallèlement au champ

électrique, d'une quantité égale à $(40 - e)$ en mm. La courbe du module de R présente l'aspect de

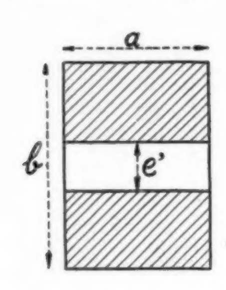


Fig. 67.

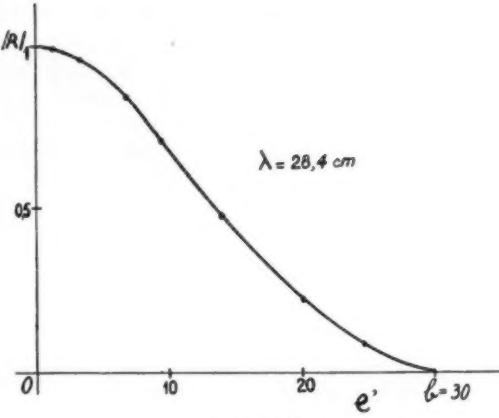


Fig. 67 *bis*.

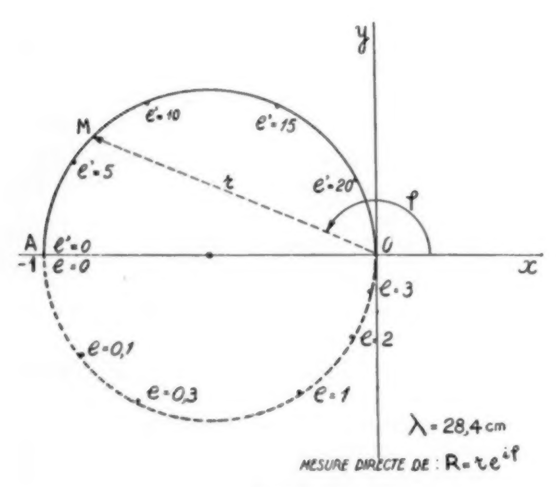


Fig. 68.

la figure 69 *bis* qui nous servira par la suite. On constate que la courbe passe par un maximum pour $e = e_0 = 3$ mm et décroît ensuite de 1 à 0.

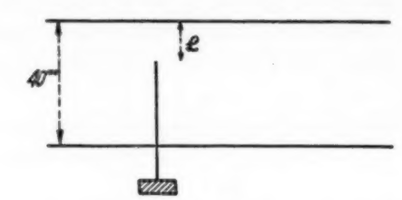


Fig. 69.

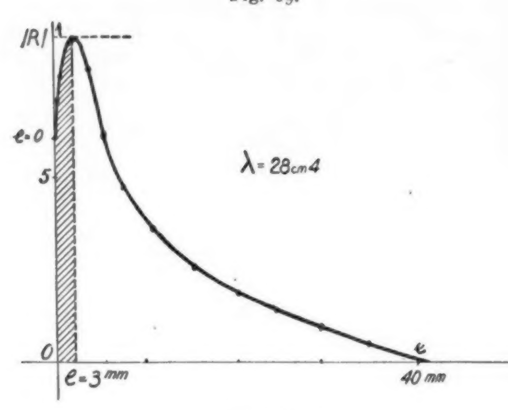


Fig. 69 *bis*.

Le diagramme de R est représenté en trait plein sur la figure 70. On constate donc, expérimentalement, que, pour $e < e_0$ (région hachurée de la figure 69 *bis*), la tige fonctionne comme une self, et pour $e > e_0$, elle fonctionne comme une capacité. Pour $e = e_0$, il y a réflexion totale.

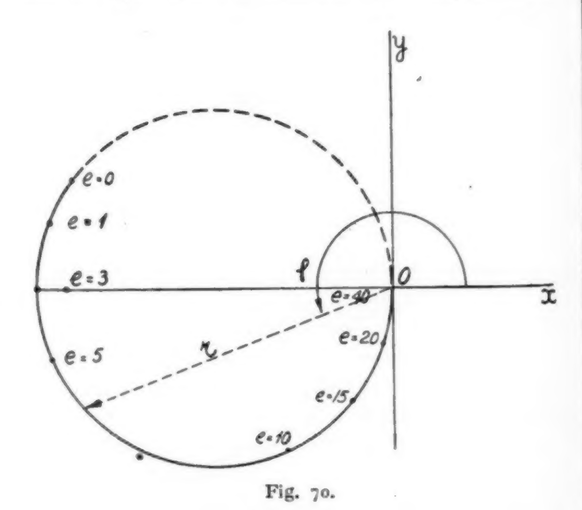


Fig. 70.

Impédance équivalente. — Pour connaître l'impédance équivalente dans les trois cas, examinons les courants transversaux le long de la plaque ou du fil dont le rayonnement provoque la réflexion de l'onde incidente.

Dans le premier cas (*fig.* 71 *a*), c'est le courant de déplacement i' entre les lèvres de la fente perpendiculaire au champ électrique qui rayonne. Ce courant est en quadrature arrière avec le champ et, par suite, le rayonnement est identique à ce que donnerait le courant de déplacement d'une capacité C placée en dérivation dans une ligne.

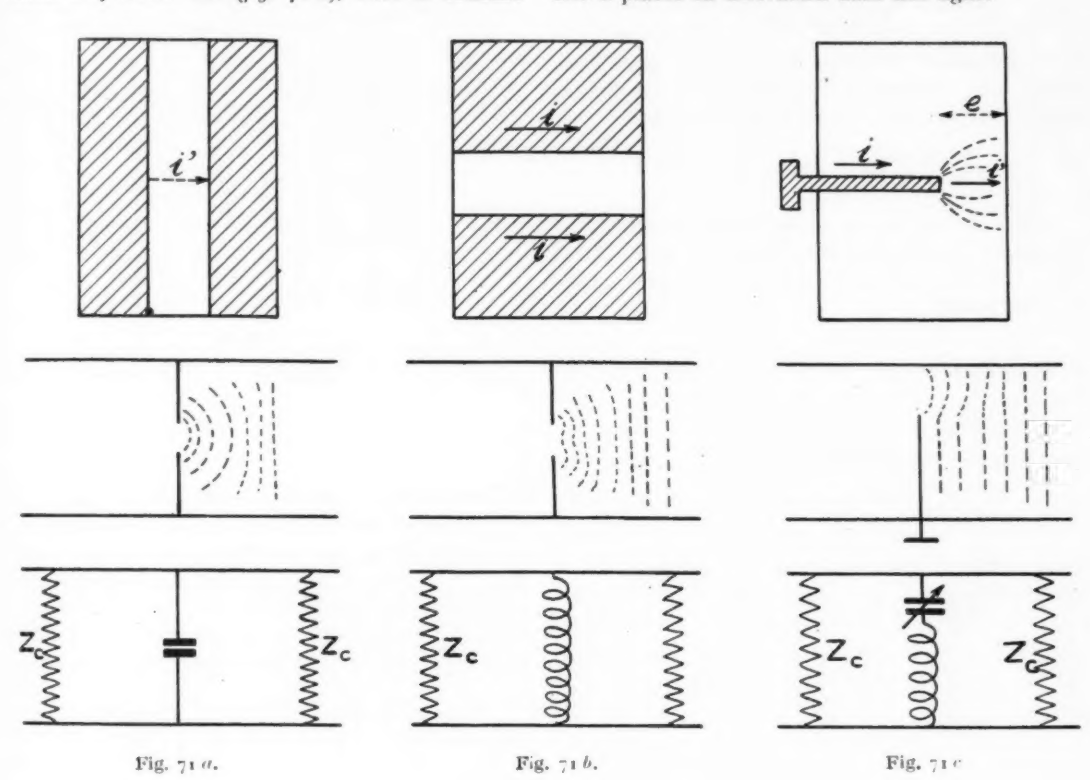


Fig. 71 *a*. Fig. 71 *b*. Fig. 71 *c*.

Dans le second cas (*fig.* 71 *b*), c'est la différence de rayonnement des courants de conduction i qui crée l'onde réfléchie. Ces courants, comme nous l'avons vu dans l'étude du couple, ont un rayonnement analogue à celui d'une self (la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement étant en effet positive).

Dans le troisième cas (*fig.* 71 *c*), le courant de conduction i rayonne comme pour une self, dont nous avons d'ailleurs calculé la valeur dans la première partie, le courant de déplacement i' rayonne comme pour une capacité. La tige est équivalente à une self en série avec une capacité. Cette capacité est variable lorsque e augmente, l'accord du circuit électrique formé étant réalisé pour $e = e_0$.

Nous avons vu que l'expérience justifie entièrement ces théories.

Obstacles en série.

Un second cas particulier d'obstacles passifs intercalés est l'obstacle série formé par un trou

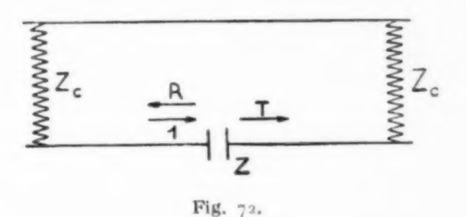


Fig. 72.

disposé sur la paroi du guide, ce trou ne pouvant rayonner de l'énergie par la mise en dérivation sur lui d'un résonateur par exemple. L'onde réfléchie

provient de la coupure des lignes de courant le long de la paroi. La même théorie que dans le cas précédent est valable, mais la relation

$$T = 1 + R \tag{4}$$

doit être remplacée par la relation

$$T = 1 - R \tag{6}$$

qui représente le théorème de conservation de l'électricité à la hauteur de la coupure. Les équations caractéristiques de ce type d'obstacle sont :

$$\begin{cases} R = \cos u \, e^{-iu} \\ T = i \sin u \, e^{-iu} \quad \text{où } \varphi = -u. \end{cases} \tag{7}$$

Le schéma électrique correspondant est celui d'une impédance imaginaire pure disposée en série dans la ligne. C'est une self si u est négatif et une capacité si u est positif.

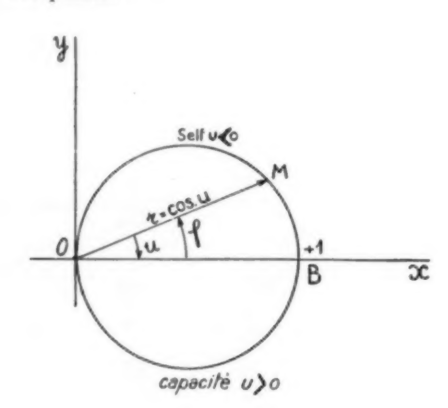


Fig. 73.

Le diagramme du coefficient de réflexion (*fig.* 73) est le cercle de diamètre OB (B d'abscisse $+1$) symétrique du cercle étudié précédemment par rapport à Oy. La partie supérieure du cercle correspond à des fentes parallèles aux lignes de courant ($u < 0$ self) la partie inférieure aux fentes perpendiculaires ($u > 0$ capacités). L'expérience a confirmé entièrement ces résultats.

CHAPITRE IV.

Obstacle constitué par le rayonnement d'un fil placé a l'intérieur du guide.

Considérons le grand cornet qui sert aux expériences pour la diffraction et supposons négligeables (ou corrigées par une réflexion auxiliaire convenable) les réflexions dues à l'emploi du cornet.

Plaçons à l'intérieur de celui-ci, soutenu par un support isolant n'introduisant pas de réflexions parasites, un objet métallique de forme quelconque.

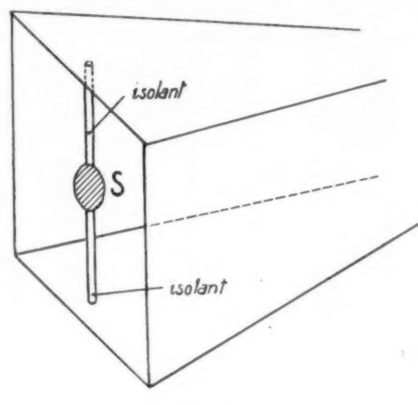


Fig. 74.

Nous pouvons étudier la réflexion de l'onde incidente sur cet obstacle. Le module du coefficient de réflexion permet de connaître la puissance réfléchie dans le tuyau, qui n'est autre que la puissance diffractée par l'objet dans une demi-sphère ayant comme axe la direction opposée à la direction de propagation de l'onde incidente.

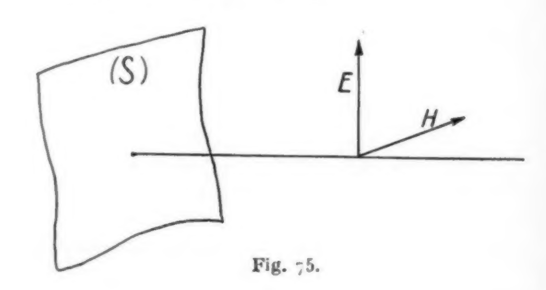


Fig. 75.

Si la hauteur de l'objet est assez faible vis-à-vis de la hauteur du cornet, quelle que soit la largeur, on peut admettre que l'onde incidente est uniforme dans toute la surface (S) de l'objet.

La puissance mesurée représente alors la puissance diffractée dans la demi-sphère précédemment définie, par réflexion d'une onde plane homogène sur l'objet considéré.

Comme dans l'exemple de la diffraction par une ouverture, la puissance diffractée peut être calculée par les formules de Kottler comme nous l'avons vu.

Dans le cas d'un miroir plan rectangulaire, le calcul est presque identique au calcul déjà exécuté pour une embouchure rectangulaire. Si la hauteur de l'objet est supérieure à la moitié de la hauteur du cornet, il est nécessaire de tenir compte de la variation sinusoïdale du champ incident. Le calcul n'offre aucune difficulté supplémentaire.

Fig. 76.

Dans le cas d'objets filiformes, les formules de diffraction doivent être remplacées par les formules de rayonnement.

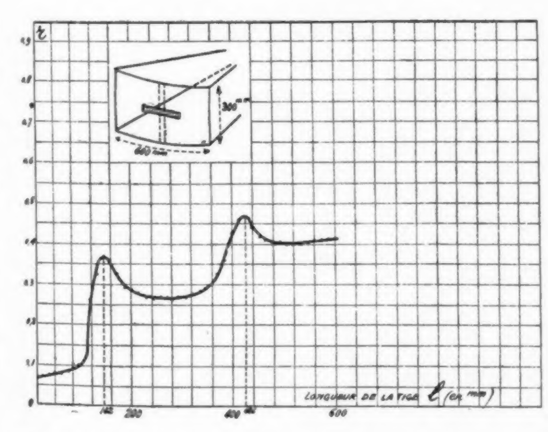


Fig. 77. — Courbe donnant le module du coefficient de réflexion sur une tige de 15mm de diamètre en fonction de la longueur l de la tige. La réflexion parasite due à l'emploi du cornet n'a pas été compensée. $\lambda = 28{,}4$ cm.

Nous avons ainsi étudié deux exemples de rayonnement.

1° *Rayonnement d'un cylindre mince de longueur variable.* — Nous avons étudié le coefficient de réflexion d'un cylindre conducteur de 15 mm de diamètre, de longueur variable entre 0 et 60 cm, placé parallèlement au champ électrique au centre de l'embouchure d'un cornet ayant pour ouverture (60 × 30 cm) comme l'indique la figure 76 avec une longueur d'onde de 28,4 cm.

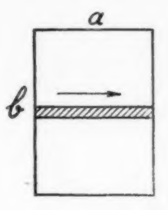


Fig. 78.

On a obtenu, pour le module du coefficient de réflexion, la courbe de la figure 77.

Il y a deux paliers à peu près horizontaux, séparés par deux pointes de résonance à $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{3\lambda}{2}$ exactement.

L'interprétation de ce résultat a été vu lors de l'étude de la diffraction.

2° *Rayonnement d'un fil conducteur connecté aux deux côtés d'un guide terminé par l'impédance caractéristique.* — C'est le phénomène même qui sert à mesurer les champs. Le coefficient de réflexion sur l'obstacle constitué par le fil O placé dans un guide

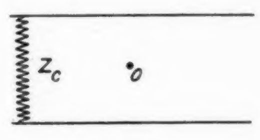


Fig. 79.

terminé par l'impédance caractéristique (*fig.* 79) coïncide avec le coefficient de rayonnement défini dans la première partie. Nous avons calculé alors ce dernier et avons montré que la perturbation apportée à la mesure d'un champ électrique par la présence du couple pouvait s'exprimer en fonction de ce seul coefficient dans tous les cas. Il suffit de placer un couple, identique au couple servant à faire la mesure, en O, et de mesurer le coefficient de réflexion. On en déduit le coefficient de rayonnement cherché et par suite les termes de correction dans tous les cas. Ce coefficient est un peu différent du coefficient théorique à cause de la présence de l'enveloppe de verre.

CHAPITRE V.

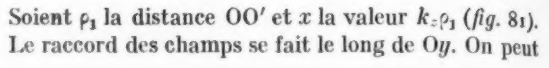
Obstacle constitué par le changement de courbure de la surface d'onde.

Supposons qu'un guide parcouru par l'onde H_{01} débouche dans un cornet sectoral indéfini dont une des sections coïncide avec la section du guide. Nous avons vu que le cornet peut être divergent dans le sens de la hauteur comme dans le sens de la largeur du guide. Nous avons indiqué l'onde H_{01} du cornet correspondant à chacun de ces deux cas. C'est celle qui s'accorde le mieux avec l'onde H_{01} du guide. Toutefois, l'impossibilité d'accorder exactement les deux ondes dans le plan de jonction AB entraîne l'existence dans le guide d'une onde réfléchie caractérisée par un coefficient de réflexion relatif à l'obstacle correspondant placé en AB.

On peut calculer ce dernier de deux façons différentes selon que l'on envisage le raccord des ondes ou l'impédance caractéristique des divers éléments.

1. Cornet divergent suivant la largeur du guide.

On prend comme axes Ox, Oy, Oz. Oz est parallèle à la direction de propagation et Ox parallèle à la polarisation. Le point O est le centre de la section commune.


Soient ρ_1 la distance OO′ et x la valeur $k_z\rho_1$ (*fig.* 81). Le raccord des champs se fait le long de Oy. On peut

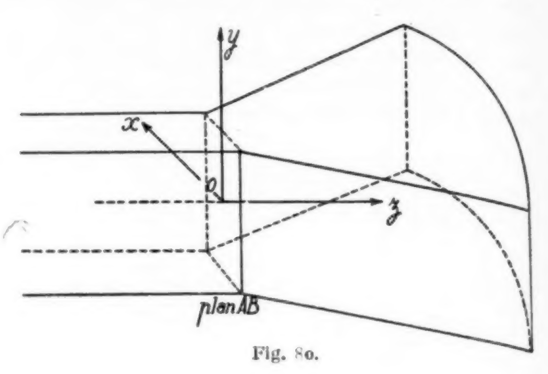


Fig. 80.

admettre, si la courbure de la surface d'onde dans le cornet est faible, que le raccord est alors valable

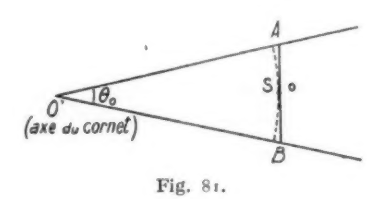


Fig. 81.

pour toute la section S. Ceci posé, voici, dans ces axes, l'expression des champs [2-3].

Onde incidente.	Onde réfléchie.	Onde transmise.
$E_x = E_i \cos\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)}$	$E_x = E_r \cos\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t + k_z z)}$	$E_x = E_0 \cos\frac{\pi y}{b} \mathcal{H}_1^{(2)}(x) e^{i\omega t}$
$H_y = \frac{k_z}{k} E_x$	$H_y = -\frac{k_z}{k} E_x$	$H_y = E_0 i \frac{k_z}{k} \cos\frac{\pi y}{b} \mathcal{H}_0^{(2)}(x) e^{i\omega t}$
$H_z = E_i \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} \sin\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)}$	$H_z = E_r \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} \sin\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t + k_z z)}$	$H_z = E_0 \frac{i}{k}\frac{\pi}{b} \sin\frac{\pi y}{b} \mathcal{H}_1^{(2)}(x) e^{i\omega t}$

On trouve sans difficulté les deux conditions

$$E_i + E_r = E_0\, \mathcal{H}_1^{(2)}(x),$$
$$E_i - E_r = E_0\, i\mathcal{H}_0^{(2)}(x).$$

D'où la relation

$$\frac{1+R}{1-R} = \frac{\mathcal{H}_1^{(2)}(x)}{i\mathcal{H}_0^{(2)}(x)}. \tag{1}$$

Cette relation se retrouve aussi simplement en remarquant que le cornet peut être assimilé à une ligne divergente dont l'impédance caractéristique, vue du plan $z = 0$, serait égale à

$$Z'_c = \frac{4\pi}{c} a \frac{E_x}{H_y} = \frac{4\pi a}{c} \frac{k_z}{k} \frac{\mathcal{H}_1^{(2)}(x)}{\mathcal{H}_0^{(2)}(x)}.$$

On en tire la relation (1) par le passage de l'impédance Z'_c à R.

Le théorème de conservation de l'énergie est confirmé au passage de la section commune.

R est donné par

$$R = \frac{\mathcal{H}_1^{(2)}(x) - i\mathcal{H}_0^{(2)}(x)}{\mathcal{H}_1^{(2)}(x) + i\mathcal{H}_0^{(2)}(x)}, \tag{2}$$

en posant $R = re^{i\varphi}$, on a

$$r^2 = \frac{\frac{\pi}{4}x[h_0^2(x) + h_1^2(x)] - 1}{\frac{\pi}{4}x[h_0^2(x) + h_1^2(x)] + 1},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{d}{dx}[h_0^2(x)]}{h_1^2 - h_0^2}.$$

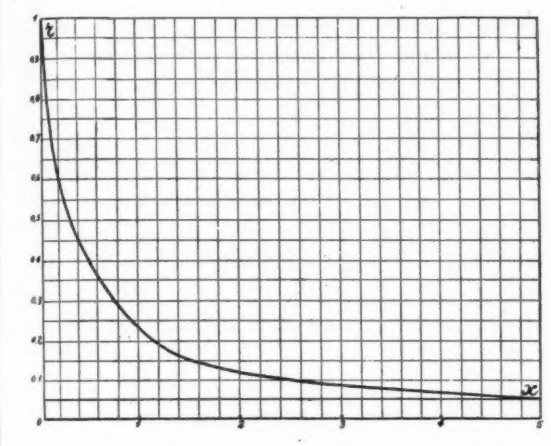


Fig. 82. — Courbe donnant le module du coefficient de réflexion dû au changement de courbure d'onde d'un cornet divergent suivant la largeur en fonction du rapport $x = \frac{2\pi\rho_1}{\lambda'}$.

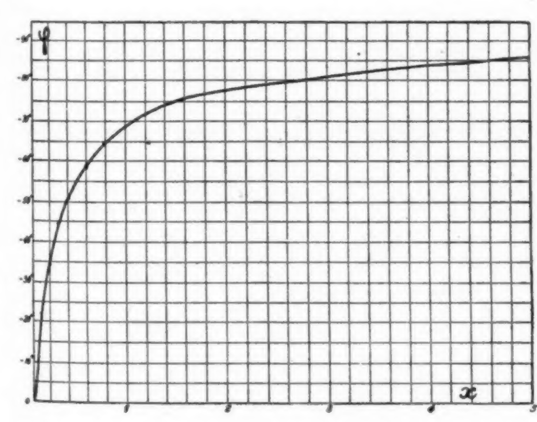


Fig. 83. — Courbe donnant la phase du coefficient de réflexion dû au changement de courbure d'onde pour un cornet divergent suivant la largeur en fonction du rapport $x = \frac{2\pi\rho_1}{\lambda'}$.

Les figures 82 et 83 donnent les valeurs de r et de φ pour les valeurs de x allant de zéro à l'infini.

Cherchons les valeurs de r et φ pour les deux sortes de cornets utilisés dans les expériences précédentes.

a. Cornet récepteur. — Les cotes sont définies par la figure 84.

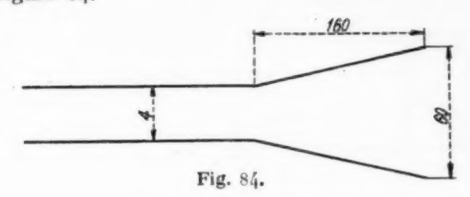


Fig. 84.

On a

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 + 160} = \frac{4}{60} \qquad \text{d'où} \quad \rho_1 = 11,5.$$

Pour une longueur d'onde de 28,4 cm dans l'air, donnant 32,2 cm dans le guide,

$$x = \frac{2\pi\rho_1}{\lambda'} = 2,25.$$

Les courbes donnent

$$r = 0,1, \qquad \varphi = -80^\circ.$$

Ce coefficient de réflexion a un module assez petit pour éviter la formation importante d'une suite d'ondes réfléchies alternativement sur l'obstacle à mesurer et sur le cornet récepteur. Le principe de la correction absolue sera vue au chapitre suivant.

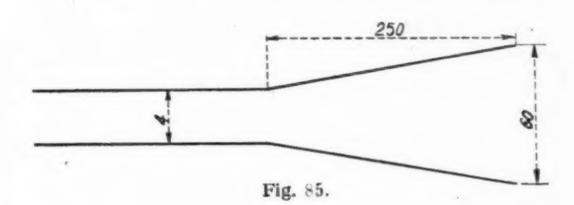


Fig. 85.

b. Cornet émetteur utilisé dans les mesures de diffraction. — Les cotes sont définies par la figure 85. On a

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 + 250} = \frac{4}{60}, \qquad \rho_1 = 18 \text{ cm}.$$

Pour une longueur d'onde de 28,4 cm dans l'air et de 32,2 dans le guide, on a

$$x = \frac{2\pi\rho_1}{\lambda'} = 3,6.$$

Les courbes donnent

$$r = 0,07, \qquad \varphi = -85^\circ.$$

C'est la présence de cette réflexion qui explique

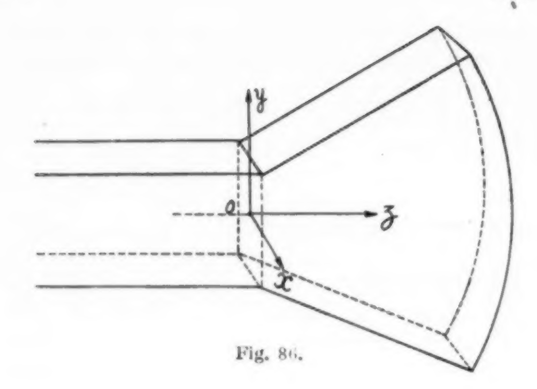


Fig. 86.

l'existence de franges observées dans l'étude de la diffraction. Nous verrons, au chapitre suivant, comment le coefficient de réflexion dû à la diffraction seule, peut se déduire du coefficient de l'ensemble des deux discontinuités par la connaissance du coefficient de réflexion précédemment calculé.

2. Cornet divergent suivant la hauteur du guide.

Nous prendrons les mêmes axes et la même définition de ρ_1 que dans l'exemple précédent. Mais on posera $x = k\rho_1$. On a alors, comme expression des champs [2-3],

Onde incidente.	Onde réfléchie.	Onde transmise.
$E_x = E_i \cos\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)}$	$E_x = E_r \cos\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t + k_z z)}$	$E_x = -E_0 \mathcal{H}_p^{(2)}(k\rho_1)\cos p\theta\, e^{i\omega t}$
$H_y = \frac{k_z}{k} E_x$	$H_y = -\frac{k_z}{k} E_x$	$H_y = -E_0 i\mathcal{H}_p^{(2)\prime}(k\rho_1)\cos p\theta\, e^{i\omega t}$
$H_z = E_i \frac{i}{k}\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)}$	$H_z = E_r \frac{i}{k}\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t + k_z z)}$	$H_z = -E_0 \frac{i}{k}\frac{p}{\rho_1}\mathcal{H}_p^{(2)}(k\rho_1)\sin p\theta\, e^{i\omega t}$

avec les relations

$$p = \frac{\pi}{\theta_0}, \qquad p\theta = \frac{\pi y}{b} \qquad \text{et} \qquad b = \rho_1\theta_0.$$

On en tire les deux équations

$$E_i + E_r = -\mathcal{H}_p^{(2)}(x)E_0,$$

$$\frac{k_z}{k}(E_i - E_r) = -i\mathcal{H}_p^{(2)\prime}(x)E_0,$$

ce qui donne

$$\frac{1+R}{1-R} = \frac{k_z\mathcal{H}_p^{(2)}(x)}{ik\mathcal{H}_p^{(2)\prime}(x)}.$$

O' θ₀ S O

Fig. 87.

Comme dans l'exemple précédent, cette relation est évidente si l'on remarque que le cornet est équivalent à une ligne divergente ayant pour impédance caractéristique, vue du plan de jonction, la valeur

$$Z_c' = -\frac{4\pi a}{c}\frac{E_x}{H_y} = \frac{4\pi a}{c}\frac{\mathcal{H}_p^{(2)}(x)}{i\mathcal{H}_p^{(2)\prime}(x)}.$$

Pour connaître la valeur numérique de R, nous supposerons (ce qui est toujours le cas), que l'angle θ_0 est petit, donc p grand. Nous utiliserons l'expression suivante de $\mathcal{H}_p^{(2)}\left(\frac{p}{\cos\alpha}\right)$ valable lorsque p est grand [2-3]

$$(1) \qquad \mathcal{H}_p^{(2)}\left(\frac{p}{\cos\alpha}\right) = -e^{-3i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi\,\mathrm{tg}(\alpha p)}}\,e^{-ip(\mathrm{tg}\alpha - \alpha)}.$$

Si nous posons

$$k_z^2 = k^2 - \frac{\pi^2}{b^2} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = \frac{k_z}{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{\pi}{bk} = \frac{\pi}{k\rho_1\theta_0} = \frac{p}{x},$$

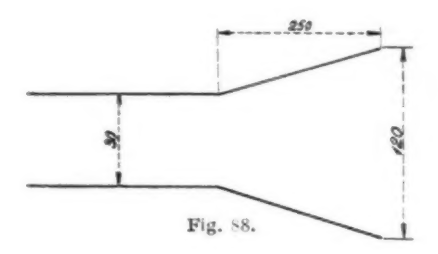


Fig. 88.

$\frac{p}{\cos\alpha}$ est bien l'argument x des fonctions de Hanckel. Le calcul de R est alors facile et donne

$$R = \frac{i\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{4p\sin^2\alpha - i\,\mathrm{cotg}\,\alpha}.$$

En général, $\mathrm{cotg}\,\alpha$ est petit devant $4p\sin^2\alpha$:

$$R = \frac{i\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{4p\sin^2\alpha}.$$

Vérifions que le coefficient de réflexion est faible pour le cornet émetteur dont la hauteur diverge de la façon indiquée par la figure 88.

$$\theta_0 = 0{,}44, \qquad p = 7{,}2.$$

Pour une longueur d'onde de 28,4 cm,

$$\cos\alpha = \frac{\pi}{bk} = 0{,}46,$$

$$\sin\alpha = \frac{k_z}{k} = 0{,}88,$$

$$R = i\,\frac{0{,}46}{4.7{,}2(0{,}88)^3} = i.0{,}02.$$

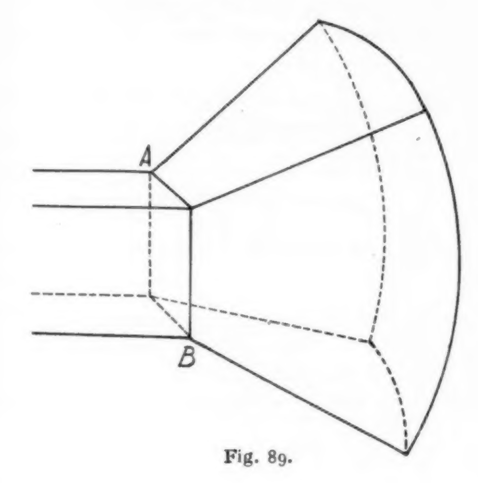


Fig. 89.

Ce coefficient de réflexion est très petit et nous pouvons considérer pour le cornet utilisé (divergent dans les deux sens), que la réflexion sur le plan AB est due uniquement à la divergence du cornet suivant la largeur.

Toutefois, la divergence suivant la hauteur intervient pour changer la vitesse de propagation de phase à l'intérieur du cornet pendant la propagation, laquelle varie d'une façon continue.

CHAPITRE VI.

Obstacles disposés en série à l'intérieur d'un guide indéfini. Réalisation de l'impédance caractéristique.

Considérons, à l'intérieur d'un guide indéfini (ou terminé par l'impédance caractéristique), un obstacle O de nature quelconque, ramené au plan AB. Nous pouvons définir, pour le sens de la flèche 1 de la figure 90, un coefficient de réflexion R_0 et un coefficient de transmission T_0. Soient R_1 et T_0 (T_0 est le même d'après le théorème de réci-

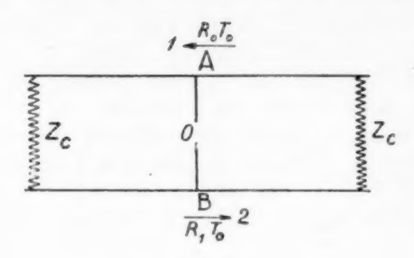


Fig. 90.

procité), les mêmes coefficients relatifs au sens de la flèche 2, les coefficients R_0 et R_1 n'étant identiques que si l'obstacle *n'absorbe pas d'énergie*. Ceci

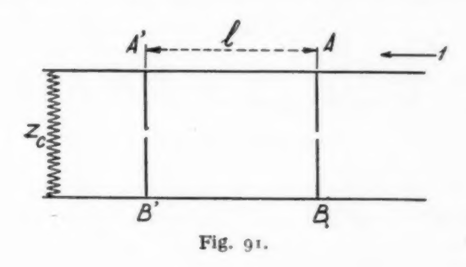


Fig. 91.

posé, soient (*fig.* 91) deux obstacles de nature quelconque, ramenés aux plans AB et A'B' et séparés par la distance l. Soient R_0, T_0, R_1 et R'_0, T'_0 les quantités précédemment définies pour les obstacles AB et A'B', la quantité R'_1 n'étant pas à envisager. L'obstacle A'B' peut d'ailleurs ne pas être suivi de l'impédance caractéristique du guide et désigner un obstacle terminal quelconque (diffraction, etc.). Dans ce cas, R'_0 représente le coefficient de réflexion de l'obstacle A'B' seul.

Nous allons chercher, avec ces notations, le coefficient de réflexion (défini par rapport au plan AB) et le coefficient de transmission de l'ensemble de ces deux obstacles, vis-à-vis d'une onde incidente H_{01} dont le sens de propagation est le sens de la flèche de la figure 91. Le calcul, qui tient compte des réflexions successives entre AB et A'B', donne

$$R = R_0 + \frac{T_0^2 R'_0\, e^{-2ik_z l}}{1 - R_1 R'_0\, e^{-2ik_z l}}, \tag{1}$$

$$T = \frac{T_0 T'_0}{1 - R_1 R'_0\, e^{-2ik_z l}}. \tag{2}$$

Ces deux formules ont des applications importantes.

1. Calcul d'un coefficient de réflexion malgré l'existence d'une réflexion parasite.

Supposons, dans l'exemple de la figure 90, que nous ne puissions réaliser l'un des obstacles AB ou A'B' sans faire apparaître l'autre. Si le coefficient de réflexion de l'obstacle parasite (R_0 et R_1 ou R'_0 selon le cas) est calculable ou mesurable séparément, la mesure du coefficient R permet de connaître le coefficient inconnu par l'emploi de la formule (1). Si l'obstacle n'absorbe pas d'énergie, le théorème de conservation de l'énergie donne

$$|R_0| = |R_1|,$$
$$|T_0|^2 = 1 - |R_0|^2,$$
$$|T'_0|^2 = 1 - |R'_0|^2.$$

Si, en outre, on ne considère que des obstacles ayant un coefficient de réflexion de faible module, l'équation (1) se simplifie et devient

$$R = R_0 + R'_0\, e^{-2ik_zl}. \tag{3}$$

Le coefficient de réflexion R' par rapport au plan A'B', serait alors

$$R' = R'_0 + R_0\, e^{2ik_zl}. \tag{4}$$

Ces formules (3) et (4) indiquent que, pour des obstacles à coefficient de réflexion de faible module, les coefficients de chaque obstacle s'ajoutent, compte tenu de la propagation.

Nous citerons deux exemples d'application des formules (3) et (4).

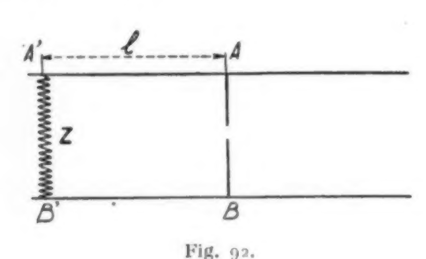


Fig. 92.

1° *Calcul du coefficient de réflexion d'un obstacle placé dans un guide lorsque l'impédance caractéristique est mal réalisée.* — C'est le cas de la plupart des exemples examinés jusqu'ici (fente, bloc d'isolant, etc.). Désignons par R'_0 le faible coefficient de réflexion dû au fait que l'impédance caractéristique est mal réalisée (défini par rapport à un plan A'B' déterminé) et par R le coefficient de réflexion mesuré. L'utilisation de la formule (3) donne

$$R_0 = R - R'_0\, e^{-2ik_zl},$$

R_0 est le coefficient de réflexion cherché. Le coefficient R'_0 se mesure facilement en supprimant l'obstacle AB.

2° *Calcul du coefficient de réflexion dû à la diffraction malgré l'existence d'une réflexion parasite à l'entrée d'un cornet.* — Dans cet exemple, c'est R'_0 que l'on cherche. L'utilisation de la formule (4) donne alors

$$R'_0 = R' - R_0\, e^{2ik_zl}.$$

Nous avons vu, au chapitre précédent, que R_0 pouvait être calculé. La formule (4) permet de comprendre les franges de la figure 44 au chapitre de la diffraction.

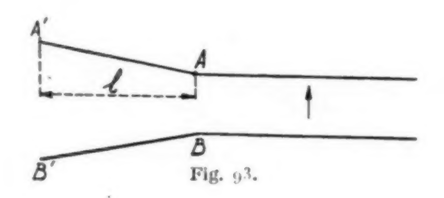


Fig. 93.

Soit, en effet, (C) la courbe théorique donnant R'_0 en fonction de la largeur a de l'ouverture. Il faut ajouter à R'_0 un coefficient $R_0 e^{2ik_zl}$ constant en module et de phase variable avec a puisque l varie

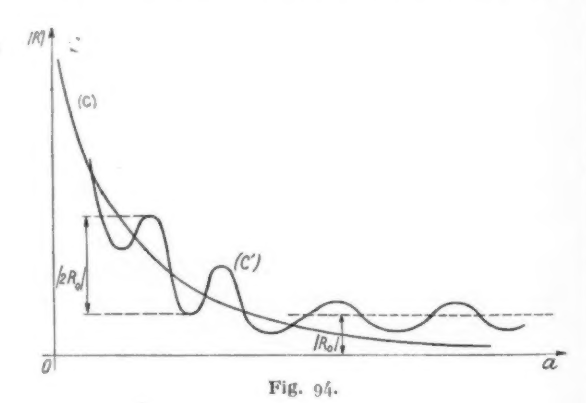


Fig. 94.

avec a. Il est clair (*fig.* 94) que dans la première partie de (C'), la courbe (C) va passer par les milieux des franges de (C') la distance des maximums au maximum étant un peu inférieure à $(2R_0)$, tandis que, dans la deuxième partie, la courbe (C') va osciller autour de la droite d'ordonnée $|R_0|$ avec des amplitudes d'oscillations de plus en plus petites correspondantes aux points de (C). Dans cette partie, la phase du coefficient de réflexion, mesuré par

rapport au plan AB fixe, doit tendre vers une constante indépendante de a.

L'expérience confirme que la courbe de la figure 44 est identique à la courbe (C') de la figure 94. Elle permet de tracer la courbe (C) et de déterminer R_0.

Remarque. — Dans le cas du cornet utilisé, la vitesse de propagation de la phase ne reste pas constante et, par suite, le terme $e^{-2ik_z l}$ doit être remplacé par un terme plus compliqué tenant compte de cette condition. Le calcul de ce terme se fait en utilisant les équations de propagation indiquées dans l'introduction. Toutefois, les explications qualitatives relatives aux positions des courbes (C) et (C') sont encore valables.

2. Cas où les deux obstacles ont des coefficients de réflexion égaux en module.

Soit

$$R_0 = r\,e^{i\varphi}, \qquad R'_0 = r\,e^{i\varphi'}.$$

Supposons encore que les obstacles n'absorbent pas d'énergie.

On a

$$|T_0|^2 = |T'_0|^2 = 1 - r^2.$$

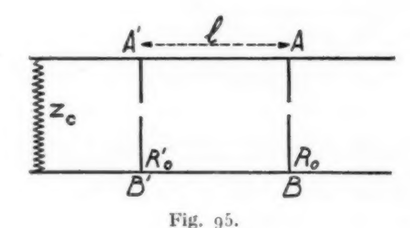


Fig. 95.

L'application de la formule (2) donne

$$(5) \qquad |T| = \frac{1 - r^2}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos(2k_z l - \varphi - \varphi')}}.$$

On peut tracer les courbes donnant $|T|$ en fonction de l. Le coefficient de transmission est égal à 1 lorsque l'angle $2k_z l - \varphi - \varphi' = 0$.

On peut retrouver cette formule dans le cas (assez général) où l'on peut utiliser les résultats obtenus au Chapitre III. Chaque obstacle peut être assimilé à une self ou une capacité en dérivation dans une ligne. L'impédance de l'ensemble (et, par suite, les coefficients de réflexion et de transmission) se calcule par la loi d'Ohm. On obtient le même résultat que par la méthode précédente, basée sur l'optique, qui consiste à ajouter les réflexions successives. C'est un exemple de corrélation entre méthodes optiques et électriques appuyées sur la notion de coefficient de réflexion.

Dans le cas actuel où les modules r et r' sont égaux, les deux cas possibles sont ceux des figures 96 *a* et 96 *b*. On voit que, dans le premier cas, les impédances sont égales et dans le second cas, opposées.

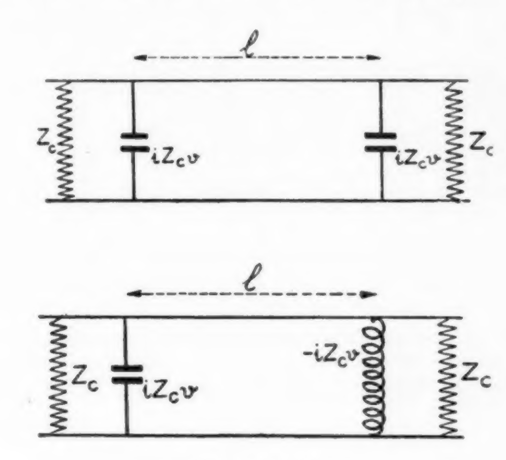


Fig. 96 *a* et *b*.

Dans le second cas, la transmission totale est obtenue évidemment pour $l = n\frac{\lambda}{2}$ (ce qui correspond au fait que $\varphi' = -\varphi$). L'impédance ramenée en dérivation dans la ligne est alors infinie.

Dans le premier cas, un calcul simple montre que l'accord du circuit électrique est réalisé pour

$$k_z l = -\operatorname{arc\,tg} 2v = u$$

(ce qui correspond au fait que $\varphi' = \varphi = \pi + u$). La transmission est alors également totale.

Toutes les courbes précédentes, si r reste fixe, se déplacent simplement par translation. On n'a donc à considérer que la famille de courbes à un paramètre

$$(6) \qquad |T| = \frac{1 - r^2}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos 2k_z l}}$$

par un choix convenable de l'origine des abscisses.

La figure 97 représente deux courbes (C') et (C) relatives à deux valeurs de r différentes.

Ces courbes sont périodiques, de périodes $\frac{\lambda'}{2}$. Pour $l = n\frac{\lambda'}{2}$, λ' longueur d'onde dans le guide, le module de $|T|$ est égal à 1. La courbe est d'autant plus pointue pour ces valeurs que le para

mètre r est plus voisin de 1, le minimum étant d'ailleurs $\frac{1-r^2}{1+r^2}$.

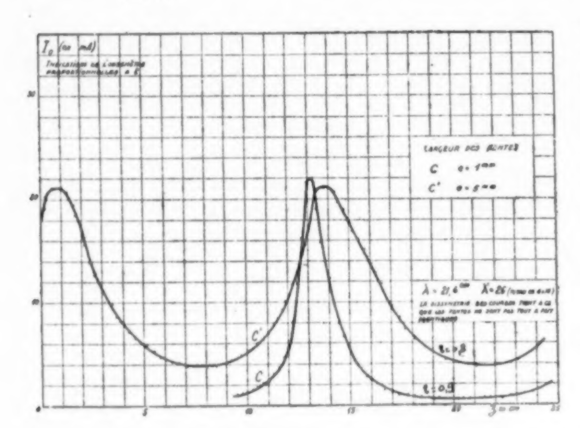


Fig. 97. — Courbe de transmission de 2 fentes perpendiculaires au champ électrique donnant le module du coefficient de transmission en fonction de la position z de la fente variable.

Le tracé expérimental de ces courbes a été fait en prenant comme obstacles AB et A'B' des fentes égales placées dans un guide terminé par l'impédance caractéristique. La mesure du coefficient de transmission se fait en mesurant le champ diffracté au loin, comme nous l'avons vu à différentes reprises. L'expérience fournit des courbes conformes à la théorie.

Réalisation de l'impédance caractéristique. Filtrage [1].

L'impédance caractéristique peut être réalisée en bout d'un guide de plusieurs façons. Un cornet, d'embouchure assez grande et suffisamment long pour éviter la réflexion au plan de jonction avec le guide, peut la réaliser. On peut aussi utiliser une surface résistance, de conductibilité convenable, fermant la section extrême du guide. Toutefois, cette méthode ne permet évidemment pas la mesure des coefficients de transmission à l'extérieur du guide.

Les résultats du paragraphe précédent suggèrent l'idée d'un autre procédé.

Supposons, en effet, que le guide soit terminé par un obstacle quelconque (diffraction simple ou diffraction par l'intermédiaire d'une fente ou d'un cornet) se traduisant par un coefficient de réflexion R'_0 de module r', par rapport au plan A'B'. Introduisons dans le guide un obstacle correcteur AB à distance variable l de A'B' (*fig.* 98). Si le module du coefficient de réflexion R_0 est égal à r' et si la distance l correspond au minimum du dénominateur de la formule (5) (obtenu pour $2k_z l - \varphi - \varphi' = 0$) le module du coefficient de transmission est égal à 1; il en résulte que le coefficient de réflexion est nul et, par suite, l'ensemble des deux obstacles AB et A'B' accordés réalise l'impédance caractéristique du guide.

Réalisation pratique.

Nous voyons donc que l'obstacle auxiliaire AB doit avoir un module de coefficient de réflexion r variable pour pouvoir égaler le module du coefficient

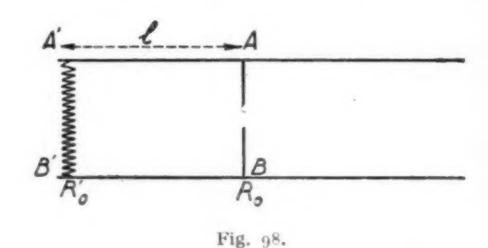


Fig. 98.

de réflexion terminal. Son argument n'a aucune importance pratique puisque l'égalité

$$2k_z l - \varphi - \varphi' = 0$$

peut être réalisée en faisant varier l, c'est-à-dire en déplaçant longitudinalement l'obstacle auxiliaire.

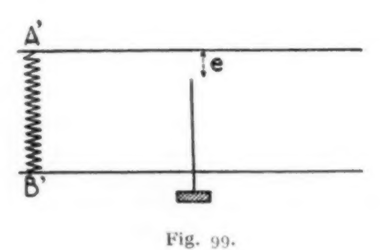


Fig. 99.

N'importe quel obstacle AB passif peut remplir cet emploi pourvu que le module r puisse prendre une valeur convenable. On a choisi, en général, l'obstacle le plus simple qui est une simple tige cylindrique que l'on peut enfoncer plus ou moins

[1] Voir *C. R. Acad. Sc.*, Note de M. H. Gutton et J. Ortusi, *Filtres électromagnétiques*, 19 juillet 1943, p. 67.

profondément dans le guide et que l'on peut déplacer longitudinalement facilement. Dans l'étude de cet obstacle au Chapitre III, nous avons vu que le module r pouvait prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et 0 lorsque la distance e variait de e_0 à la largeur a du guide. Reproduisons sur la figure 100 la courbe de la figure 69 *bis*.

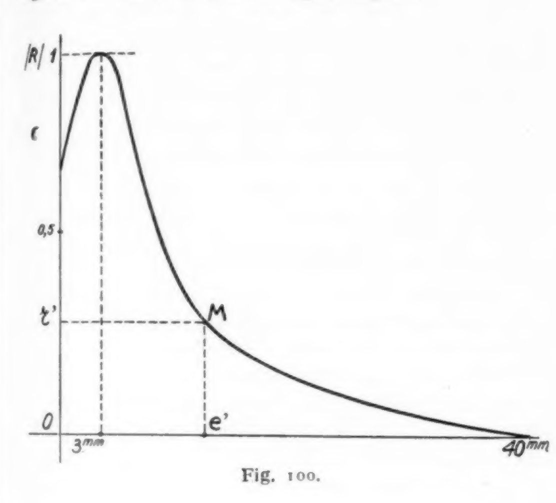


Fig. 100.

Soit r' le module du coefficient de réflexion de l'obstacle terminal. Il suffit que l'enfoncement e prenne la valeur e' correspondante à un point M de la courbe dont l'ordonnée soit r'. La distance l doit alors avoir une valeur convenable pour réaliser l'accord.

En pratique, les deux opérations (enfoncement de la tige et déplacement longitudinal) se font alternativement. On mesure, à chaque instant, le coefficient de réflexion total que l'on s'efforce de rendre minimum à chaque opération. Au bout de très peu de temps, on arrive à une valeur nulle, ce que l'on vérifie par une indication constante du galvanomètre relié au couple coulissant mesurant les réflexions. L'opération est d'autant plus facile que l'obstacle terminal a lui-même un coefficient de réflexion déjà faible.

Suppressions des réflexions parasites.

Soit à mesurer le coefficient de réflexion d'un obstacle quelconque Z (terminal ou intercalé dans un guide terminé par l'impédance caractéristique). Supposons que cet obstacle ne puisse être réalisé sans la réalisation simultanée d'un obstacle A'B donnant une réflexion parasite dont r' est le module du coefficient de réflexion. Pour supprimer l'influence de cet obstacle, il suffit de placer un obstacle AB ayant pour module de coefficient de réflexion $r = r'$ et accordé avec A'B'. Pour cela, l'élément de guide, réalisant l'impédance caractéristique, peut être utilisé. On le place en bout de l'obstacle A'B' une

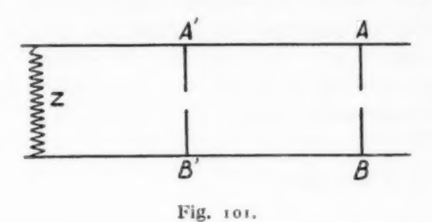


Fig. 101.

fois l'obstacle terminal Z supprimé et l'on corrige, en AB, l'obstacle parasite A'B'. L'ensemble des obstacles AB et A'B' fournit alors une transmission totale et seul l'obstacle à mesurer Z entre en ligne de compte.

Deux exemples de cette méthode ont été déjà indiqués.

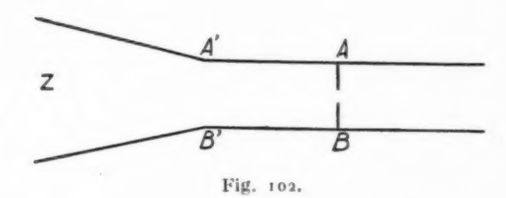


Fig. 102.

Premier exemple. — Dans la mesure du coefficient de réflexion dû à la diffraction pure (*fig.* 102), au

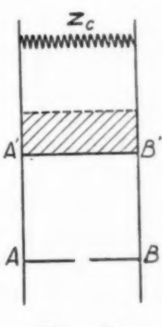


Fig. 103.

lieu de calculer l'influence de la réflexion parasite due au raccord le long du plan de jonction A'B', on peut l'éliminer en disposant, en AB, un système correcteur convenable, par exemple un système à tige.

Deuxième exemple. — Dans la mesure du coefficient de réflexion d'une épaisseur donnée d'un liquide (*fig.* 103), on peut éliminer l'influence du verre servant à empêcher le liquide de tomber en disposant un correcteur convenable.

Il suffit que l'impédance caractéristique soit retrouvée en l'absence de liquide. La tige cylindrique AB peut d'ailleurs, dans cet exemple, être remplacé par un verre AB identique au verre A'B' et convenablement placé.

Filtrage d'une onde.

Reproduisons (*fig.* 104) une des courbes de la figure 97 dans l'hypothèse d'un module commun de coefficient de réflexion r voisin de 1. L'examen de

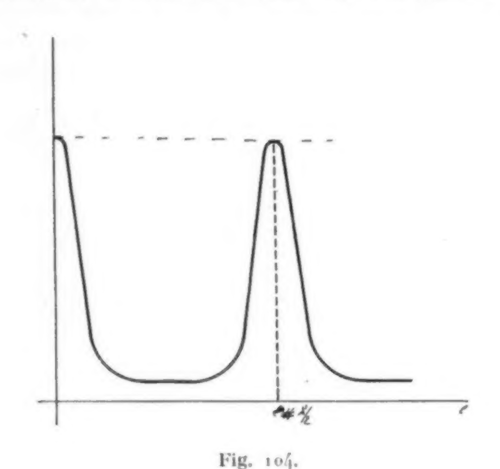


Fig. 104.

cette courbe montre que, si toute la puissance sort pour $l = \frac{\lambda'}{2}$, une très faible partie seulement n'en sort dès que l s'écarte de $\frac{\lambda'}{2}$. On en conclut que le système des deux obstacles (deux volets à fentes identiques, ou deux tiges égales, par exemple) accordés, constitue un filtre pour la longueur d'onde correspondant à λ'; ce filtre étant d'autant plus sélectif que le coefficient de réflexion de chaque obstacle est plus voisin de 1 (fentes fines).

La longueur d'onde λ' étant la longueur d'onde dans le guide relative à l'onde H_{01}, il en résulte que l'accord n'est réalisé que pour cette onde à l'exclusion des autres ondes magnétiques ou électriques. Il en résulte que le filtre constitué est non seulement un filtre de fréquence ne laissant passer, dans une gamme d'onde, qu'une fréquence propre, mais aussi un filtre d'ondes, pour une fréquence donnée, ne laissant passer que la seule onde H_{01}.

Remarque. — Dans l'étude faite pour la réalisation de l'impédance caractéristique et le filtrage, il n'a pas été tenu compte de l'amortissement dû à l'imparfaite conductibilité des parois qui pourrait contribuer à « amortir » les courbes tracées. Nous avons vu, dans l'introduction, que cet amortissement était très petit. Il ne peut être décelé avec des longueurs de guide et des appareils de mesure (couple et microampèremètre) employés.

L'expérience a justifié cette remarque.

CONCLUSION.

En résumé, nous avons mis au point et employé pour l'étude d'une onde décimétrique d'un type déterminé H_{01} se propageant dans un guide à section rectangulaire, un appareil de mesure absolue de champ électrique basé sur l'étude du rayonnement d'un fil conducteur à l'intérieur d'un guide terminé par une impédance quelconque; ce fil est un couple thermoélectrique étalonné en basse fréquence. Nous avons indiqué l'emploi de ce couple dans un ondemètre et mesuré le champ diffracté à l'extérieur par l'embouchure d'un guide ou cornet électromagnétique. Cet appareil de mesure du champ nous a servi aussi à déterminer les coefficients de transmission des obstacles placés à l'intérieur du guide. En déplaçant le couple longitudinalement, nous avons pu étudier expérimentalement la réflexion d'une onde H_{01} sur les divers obstacles présentés à sa marche. Les expériences faites ont justifié, dans la plupart des cas, la théorie basée sur l'étude de la propagation des ondes dans les guides. Toutefois, dans le cas de la diffraction, les formules de Kottler employées n'ont pu fournir des résultats conformes à l'expérience. Les formules de Kottler, qui sont exactes théoriquement, sont généralement inutilisables pratiquement, par suite du manque de renseignements sur le champ au voisinage de l'embouchure.

Nous avons calculé et vérifié par l'expérience la façon de filtrer la fréquence et le type d'onde utilisé et fourni les moyens de réaliser une cellule de filtrage de sélectivité choisie.

Nous nous sommes attachés à montrer, tout au cours de cet exposé, le rôle que jouent les ondes décimétriques comme liaison entre la T. S. F. ordinaire et l'optique. Cette liaison est principalement illustrée par la notion de coefficient de

réflexion. Nous avons montré constamment que cette notion permettait tout aussi bien certaines interprétations classiques de l'optique ondulatoire que de l'électrotechnique appliquée à l'étude des lignes.

Les ondes décimétriques, que l'on pourrait appeler à juste titre « ondes de transition » nous font vraiment toucher du doigt l'idée de Maxwell et de Hertz que les ondes électromagnétiques et la lumière ne sont que deux phénomènes identiques séparés seulement en apparence par la valeur différente de la longueur d'onde.

Sur une propriété qui leur est propre, leur utilisation à l'intérieur de guides et cornets conducteurs, nous avons vérifié, par l'expérience, les phénomènes de propagation et de réflexion prévus par la théorie de Maxwell. Enfin, nous pensons que les mesures de coefficients de réflexion effectuées pourront être utiles pour la détermination des impédances des guides ou cornets et, par suite, servir au problème du transfert de l'énergie émise par un émetteur dans ces derniers appareils, afin d'utiliser au mieux leurs propriétés directives.

Ce travail a été exécuté dans le Laboratoire de Recherches physiques de la Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil. M. Henri Gutton, qui dirige ce laboratoire, m'a constamment guidé. J'ai plaisir à rendre hommage à l'habileté et au sens physique profond avec lesquels il a su diriger et coordonner cette étude et je le remercie de la part importante qu'il a prise.

Je remercie également la Direction de la Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil, en particulier M. Ponte, pour toutes les facilités qui m'ont été données pour mener à bien ce travail, tant au point de vue du temps nécessaire que du matériel qui a été mis à ma disposition.

BIBLIOGRAPHIE.

1. De Broglie, *Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques* :

   1, page 19.
   2, page 55.
   3, page 56.
   4, page 91.
   5, page 104.
   6, page 4.

2. Barrow et Chu, *Théorie des cornets électromagnétiques* (*Proc. of the I. R. E.*, janvier 1939),

   1, page 53.
   2, page 61.
   3, page 58.

3. Schelkunoff, *Théorie de la propagation des ondes électromagnétiques planes* (*Proc. of the I. R. E.*, 1937, p. 1457).

4. Stratton et Chu, *Théorie de la diffraction pour des ondes électromagnétiques* (*Phys. Rev.*, juillet 1939),

   1, page 104.
   2, page 105.

5. Barrow, *Propagation des ondes électromagnétiques dans des tubes creux en mécanique* (*Proc. of the I. R. E.*, 1936, p. 1311).

6. Jahnke et Emde, *Tables de fonctions*,

   1, page 262.
   2, page 211.

7. Kottler, *Théorie électromagnétique de la diffraction sur un écran noir* (*Ann. der Physik*, 1923, p. 456).

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE.

PAR FÉODORA RABINOVITCH,

Ingénieur au Laboratoire de recherches « Tubes électroniques » de la Compagnie Générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *L'auteur expose une nouvelle méthode générale d'intégration approchée des équations différentielles du second ordre.*

Cette méthode, basée sur l'extrapolation, est une extension généralisée de celle qui a été fournie par Adams pour les équations du premier ordre. Elle englobe, comme cas particuliers, la plupart des procédés classiques d'intégration approchée — notamment le procédé de Störmer.

Cette nouvelle méthode est appliquée ensuite à l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \sin t$ *que l'on rencontre dans l'étude du mouvement d'une particule dans un champ de forces oscillant. On établit à son sujet des formules d'intégration approchée, et l'on estime l'erreur commise.*

L'exposé se termine par la comparaison sur quelques exemples numériques d'intégration entre la nouvelle méthode et la méthode de Störmer. Ces exemples sont empruntés au problème du mouvement des électrons dans un champ H. F. non uniforme.

Introduction.

Le présent travail a eu pour point de départ l'examen du problème des mouvements des électrons, se déplaçant d'un mouvement rectiligne dans un champ H. F. parallèle à leur trajectoire, mais d'amplitude variable avec l'abscisse. Comme l'a indiqué récemment M. Warnecke, ce problème s'introduit quand on veut étudier, théoriquement et dans le détail, le comportement de certains tubes à modulation de vitesse tels que les « klystrons » de grande puissance [9]; d'autre part, on le trouve à la base de la conception de certains autres tubes à temps de transit [8].

Dans les deux cas on a à intégrer l'équation

$$m \frac{d^2 X}{dT^2} = e E(X) \sin \omega T \tag{1}$$

où e, m, X sont respectivement la charge, la masse et l'abscisse de l'électron, et $E(X)$, ω l'amplitude et la pulsation du champ H. F., tandis que T représente le temps.

L'intégration de cette équation ne peut s'effectuer de façon rigoureuse; d'ailleurs $E(X)$ est souvent donné par une courbe et n'a pas d'expression analytique simple. Il est donc nécessaire de faire appel à des méthodes d'intégration approchée — par exemple celle de Störmer — et ces méthodes ne donnent pas toujours des résultats satisfaisants.

Cependant, en étudiant les méthodes d'intégration approchées des équations du premier ordre, on est frappé par la communauté de leur signification géométrique, et ce fait suggère une nouvelle méthode d'intégration approchée des équations du second ordre, dont la méthode de Störmer n'est qu'un cas particulier.

La généralité et la souplesse de cette méthode nouvelle la rendent susceptible de s'adapter à la nature des équations particulières que l'on se propose d'intégrer — notamment aux équations du type (1).

CHAPITRE I.

EXPOSÉ D'UN PROCÉDÉ GÉNÉRAL D'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

I. **Examen préliminaire d'un cas élémentaire.**

Soit l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g(t)$$

avec $g(t)$ intégrable rigoureusement dans tout l'intervalle de variation de t.

Dans ce cas l'intégration, qui ne présente pas de difficulté de principe, aboutit à une fonction $x(t)$ bien déterminée, pourvu que l'on se donne l'une ou l'autre des conditions initiales suivantes :

a. Soit

$$x(t_0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}.$$

b. Soit

$$x(t_0) \quad \text{et} \quad x(t_1),$$

t_0 et t_1 étant deux valeurs particulières de t.

Posons nous cependant au sujet de ce cas simple un problème dont nous apercevrons la portée par la suite : imaginons que l'on ait décomposé l'intervalle de variation de t par des points intermédiaires, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, que nous supposerons distants l'un de l'autre d'une quantité fixe h. Proposons-nous de calculer les valeurs correspondantes de x : $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et cela de *proche en proche* : le cas peut se présenter par exemple lorsque $g(t)$ a des expressions analytiques intégrables, mais différant avec les intervalles, et qu'il est par suite impossible de donner une expression analytique unique pour son intégrale

$$I(t) = \int_{t_0}^{t} g(T)\, dT$$

valable pour tous les t de l'intervalle.

Deux procédés s'offrent à nous : le procédé par intégration directe et le procédé par différences.

Pour le procédé par intégration directe on supposera x_n et $\frac{dx_n}{dt}$ connus et on calculera x_{n+1} et $\frac{dx_{n+1}}{dt}$.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g(t),$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=T} - \frac{dx_n}{dt} = \int_{t_n}^{T} g(t)\, dt,$$

d'où

$$(2) \qquad \boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} dT \int_{t_n}^{T} g(t)\, dt + \frac{dx_n}{dt} h + x_n, \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t)\, dt + \frac{dx_n}{dt}. \end{aligned}}$$

Connaissant ainsi x_{n+1} et $\frac{dx_{n+1}}{dt}$ on peut poursuivre l'intégration dans l'intervalle suivant (t_{n+1}, t_{n+2}).

Examinons maintenant le procédé par différences, et rappelons d'abord quelques définitions classiques [7]. On appelle différences 1re, 2e, ..., Kième, de x_i, les quantités Δx_i, $\Delta^2 x_i$, $\Delta^k x_i$ définies par les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, \\ \Delta^2 x_i &= \Delta x_{i+1} - \Delta x_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta^k x_i &= \Delta^{k-1} x_{i+1} - \Delta^{k-1} x_i. \end{aligned}$$

Dans le problème d'intégration qui nous intéresse on supposera connus x_{n-1} et x_n. On veut obtenir x_{n+1}. On a, d'après les définitions ci-dessus

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1}, \\ \Delta x_{n+1} &= \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1}. \end{aligned}$$

Le problème se réduit donc à calculer $\Delta^2 x_{n-1}$.

Or on a

$$\Delta^2 x_{n-1} = \Delta x_n - \Delta x_{n-1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'_t\, dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} x'_t\, dt.$$

Posons

$$\tau = \frac{t - t_n}{h},$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_{n-1} &= \int_0^1 x'_\tau\, d\tau - \int_{-1}^0 x'_\tau\, d\tau \\ &= [\tau x'_\tau]_0^1 - [\tau x'_\tau]_{-1}^0 - \int_0^1 \tau x''_\tau\, d\tau + \int_{-1}^0 \tau x''_\tau\, d\tau \\ &= x'_\tau(+1) - x'_\tau(-1) - \int_0^1 \tau x''_\tau\, d\tau + \int_{-1}^0 \tau x''_\tau\, d\tau \\ &= \int_{-1}^{+1} x''_\tau\, d\tau - \int_0^1 \tau x''_\tau\, d\tau + \int_{-1}^0 \tau x''_\tau\, d\tau \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$x''_\tau = h^2 x''_t = h^2 g(t_n + h\tau),$$

$$(3) \qquad \boxed{\Delta^2 x_{n-1} = h^2 \left[\int_0^1 (1-\tau) g(t_n + h\tau)\, d\tau + \int_{-1}^0 (1+\tau) g(t_n + h\tau)\, d\tau \right].}$$

II. **Esquisse d'un procédé géométrique d'intégration approchée.**

Soit le cas général

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g(x, t),$$

équation qui n'est pas intégrable rigoureusement.

On ne peut songer alors à trouver l'expression

analytique générale de $x(t)$. On se contente de décomposer l'intervalle de variation de t par des points d'abscisse t_i ordinairement équidistants, et l'on se propose de rechercher de proche en proche les valeurs correspondantes des x_i. *Supposons dans tout ce qui suit que le problème ait été résolu jusqu'au point* (t_n, x_n). On se propose de trouver x_{n+1}. Pour cela il sera commode de remplacer, dans l'intervalle (t_{n-1}, t_{n+1}) la fonction $g(x, t)$ par une fonction approchée intégrable $\Gamma(t)$. On en déduit sans difficulté la valeur approchée de x_{n+1} à l'aide des formules (2) ou (3), dans lesquelles on a remplacé g par $\Gamma(t_n + h\tau)$.

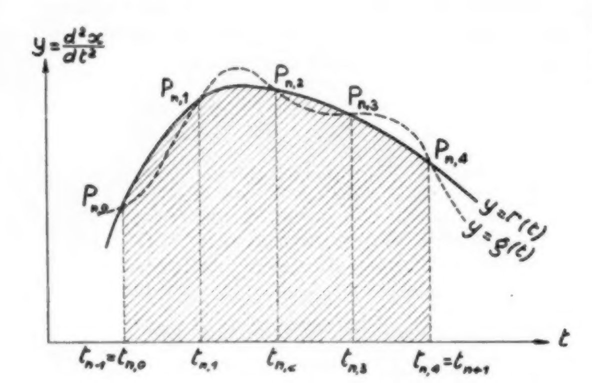


Fig. 1. — La fonction $g(t)$ est connue, mais non intégrable. L'intégration se fait dans la zone ombrée.

Le point délicat du problème consiste dans le choix judicieux de $\Gamma(t)$, de manière que l'approximation n'entraîne pas d'erreur appréciable.

Dans le cas simple où g est indépendant de x, c'est-à-dire où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(t),$$

$\Gamma(t)$ s'obtient dans l'intervalle partiel (t_{n-1}, t_{n+1}) par interpolation.

Cela signifie que, connaissant par exemple $2r + 1$ valeurs de $t_{n,i}$ contenues dans cet intervalle (on prend ordinairement des points équidistants et tels que $t_{n,0} = t_{n-1}$ $t_{n,2r} = t_{n+1}$, on assimile la courbe $y = g(t)$ à la courbe approchée, $y = \Gamma(t)$ intégrable rigoureusement et passant par les $2r + 1$ points $P_{n,i}[t_{n,i}, g(t_{n,i})]$ ainsi trouvés.

Si $\Gamma(t)$ est un polynome de degré $2r$, ce procédé relatif aux équations du second ordre devient équivalent aux méthodes classiques (méthode du trapèze, méthode de Simpson, etc.) employées lorsque l'équation différentielle est du premier ordre, et du type $\frac{dy}{dt} = g(t)$.

Dans le cas général où g est une fonction de x et de t, à part x_{n-1} et x_n, on ignore toutes les valeurs de $x(t)$ et par conséquent celles de $g(x, t)$ dans l'intervalle $t_{n-1} \leq t \leq t_{n+1}$ où il s'agit d'effectuer les intégrations. Par conséquent, le procédé d'interpolation, précédemment indiqué, ne peut plus être appliqué, le calcul de $g[x_{n,i}, t_{n,i}]$ étant impossible.

Il est indiqué alors de faire appel à *l'extrapolation*. De façon plus précise cela signifie que pour calculer x_{n+1} à partir des formules (2) ou (3), on assimile dans l'intervalle (t_{n-1}, t_{n+1}) la courbe $y = g[x(t), t]$ inconnue, à une courbe $y = \Gamma(t)$ intégrable rigoureusement, et passant par r points P_i précédemment trouvés : $P_i[t_i, g(x_i, t_i)]$ où l'on a $n - r + 1 \leq i \leq n$ [1].

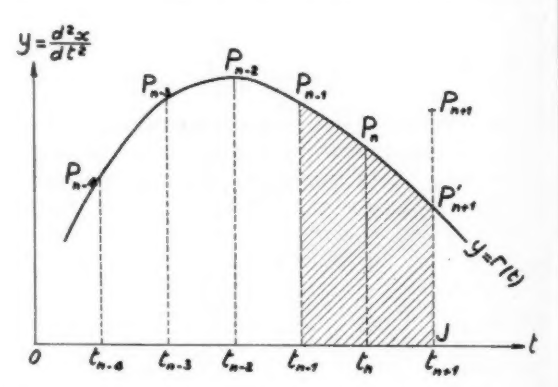


Fig. 2. — La courbe $y = g[x(t), t]$ n'est pas connue en fonction de t seul, mais elle passe par P_{n-4}, P_{n-3}, P_{n-2}, P_{n-1}, P_n. L'intégration se fait dans la zone ombrée.

Remarquons qu'extrapoler la courbe au delà de P_n entraîne à attribuer une valeur provisoire $\Gamma(t_{n+1})$ à $\frac{d^2x_{n+1}}{dt}$ (ordonnée du point P'_{n+1}).

L'intégration donne d'autre part une valeur à x_{n+1}, donc à $\frac{d^2x_{n+1}}{dt^2} = g[x_{n+1}, t_{n+1}]$ (ordonnée du point P_{n+1}). C'est la valeur ainsi trouvée que l'on retient comme *définitive* pour la suite du calcul. La distance P'_{n+1},

(1) Pour que le procédé par extrapolation puisse s'appliquer il faut donc déterminer tout d'abord les ordonnées successives des r premiers points.

Ce calcul préliminaire est toujours possible grâce à une combinaison plus ou moins laborieuse des procédés d'intégration approchée classiques. Nous indiquerons dans l'annexe 1 le principe d'un calcul de ces points initiaux, inspiré par la méthode générale exposée au paragraphe III, 2 de ce chapitre.

P_{n+1} donne donc une idée de la précision atteinte.

La borne supérieure de l'erreur commise sur x_{n+1}, lorsque celui-ci est évalué par extrapolation, pourra naturellement être appréciée d'une façon plus précise, si l'on connaît, *a priori*, le maximum de l'écart possible entre les ordonnées des courbes $y = \Gamma(t)$ et $y = g[x(t), t]$ dans l'intervalle (t_{n-1}, t_{n+1}) [1].

Notons enfin que la méthode par extrapolation qui vient d'être esquissée s'étend sans difficulté supplémentaire, comme on le conçoit facilement, au système d'équations du type général

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, \dots, u, \frac{du}{dt}, t\right),$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = h\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, \dots, u, \frac{du}{dt}, t\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{d^2 u}{dt^2} = k\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, \dots, u, \frac{du}{dt}, t\right).$$

III. Rapport entre la méthode géométrique précédente et les méthodes courantes d'intégration approchée.

1. *Intégration des équations du premier ordre.* — La méthode par extrapolation indiquée ci-dessus pour le deuxième ordre s'applique naturellement aux équations du premier ordre, $\frac{dx}{dt} = g(x, t)$ avec quelques légères simplifications : on intègre notamment alors dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) au lieu d'intégrer dans l'intervalle (t_{n-1}, t_{n+1}).

On voit de façon immédiate que c'est justement ce procédé par extrapolation qu'utilisent les méthodes classiques habituelles.

Ainsi la méthode de Gauchy-Lipschitz [6] suppose que dans tout l'intervalle (t_n, t_{n+1}) on a

$$g[x(t), t] = g(x_n, t_n),$$

ce qui revient à considérer la courbe $y = \Gamma(t)$ comme une parallèle à l'axe des y passant par P_n.

De même l'emploi successif de deux extrapolations suivies d'une interpolation est aisément constatable dans la méthode de Runge [6].

Quant à la méthode fournie par Adams [6] pour le premier ordre, elle est tout à fait analogue à celle que nous venons d'exposer pour le deuxième ordre, à condition toutefois de supposer que $\Gamma(t)$ se réduise à un polynome de degré r.

2. *Intégration des équations du deuxième ordre : méthode de Störmer.* — La méthode de Störmer [2], [3], [4], qui paraît être la méthode la plus précise jusqu'ici utilisée, est généralement exposée sans aucune mention de sa signification géométrique, c'est-à-dire de l'extrapolation qu'elle comporte. Il existe cependant, ainsi que le suggère très brièvement Hadamard [6] une parenté entre cette méthode et la méthode d'Adams.

On peut s'en rendre compte facilement lorsqu'on s'applique à dégager le sens géométrique de la méthode de Störmer.

Rappelons en quoi consiste ce procédé d'intégration approchée, tel qu'il est présenté par exemple par Kryloff [5], aux notations près.

Soit à résoudre l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g(x, t).$$

Supposons, comme dans ce qui précède, que l'on ait résolu le problème pour r points successifs, 5 par exemple, c'est-à-dire que l'on connaisse

$$(t_{n-4}, x_{n-4}), \quad (t_{n-3}, x_{n-3}),$$
$$(t_{n-2}, x_{n-2}), \quad (t_{n-1}, x_{n-1}), \quad (t_n, x_n),$$

et par suite les valeurs correspondantes

$$\gamma_i = h^2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} = h^2 g(x_i, t_i).$$
$$i = n-4, \quad n-3, \quad n-2, \quad n-1, \quad n.$$

Écrivons le développement de $x(t)$ en série de Taylor, en prenant x_n correspondant à t_n comme valeur initiale

$$x(t) = x_n + c_1(t-t_n) + \frac{c_2}{2}(t-t_n)^2 + \frac{c_3}{6}(t-t_n)^3 + \frac{c_4}{24}(t-t_n)^4 + \frac{c_5}{120}(t-t_n)^5 + \frac{c_6}{720}(t-t_n)^6 + \frac{c_7}{5040}(t-t_n)^7 + \dots,$$

on a

$$x_{n+1} = x_n + c_1 h + \frac{c_2}{2} h^2 + \frac{c_3}{6} h^3 + \frac{c_4}{24} h^4 + \frac{c_5}{120} h^5 + \frac{c_6}{720} h^6 + \frac{c_7}{5040} h^7 + \dots,$$

$$x_{n-1} = x_n - c_1 h + \frac{c_2}{2} h^2 - \frac{c_3}{6} h^3 + \frac{c_4}{24} h^4 - \frac{c_5}{120} h^5 + \frac{c_6}{720} h^6 - \frac{c_7}{5040} h^7 + \dots$$

et en posant

$$\gamma_n = h^2 x''_n = c_2 h^2,$$

il vient

$$(4) \qquad \Delta^2 x_{n-1} = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \gamma_n + \frac{c_4 h^4}{12} + \frac{c_6 h^6}{360} + \frac{c_8 h_8}{20160} + \dots$$

[1] *Voir* par exemple l'évaluation de l'erreur à partir de ce principe, au Chapitre III, paragraphe 1.

En dérivant le développement en série de Taylor de $x(t)$ il vient :

$$\gamma_{n-1} = \gamma_n - c_3 h^3 + \frac{c_4}{2} h^4 - \frac{c_5}{6} h^5 + \frac{c_6}{24} h^6 - \frac{c_7}{120} h^7 + \dots$$

$$\gamma_{n-2} = \gamma_n - 2c_3 h^3 + 4\frac{c_4}{2} h^4 - \frac{8c_5h^5}{6} + \frac{16c_6h^6}{24} - \frac{32c_7}{120} h^7 + \dots$$

D'où les trois différences

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta^2\gamma_{n-2} = \gamma_n - 2\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} \\ \qquad = \dfrac{2c_4h^4}{2} - \dfrac{6c_5h^5}{6} + \dfrac{14c_6h^6}{24} - \dfrac{30c_7}{120} h^7 + \dots, \\ \Delta^3\gamma_{n-3} = \gamma_n - 3\gamma_{n-1} + 3\gamma_{n-2} - \gamma_{n-3} \\ \qquad = \dfrac{6c_5h^5}{6} - \dfrac{36c_6h^6}{24} + \dfrac{150}{120} c_7 h^7 - \dots, \\ \Delta^4\gamma_{n-4} = \gamma_n - 4\gamma_{n-1} + 6\gamma_{n-2} - 4\gamma_{n-3} + \gamma_{n-4} \\ \qquad = \dfrac{24c_6h^6}{24} - \dfrac{240}{120} c_7 h^7 + \dots \end{cases}$$

En éliminant (à l'aide de facteurs indéterminés) les coefficients c_4, c_5, c_6 des formules (4) et (5) nous avons

$$(6)\quad \Delta^2 x_{n-1} = \gamma_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3} + \frac{19}{20}\Delta^4\gamma_{n-4}\right] + \frac{3}{40} c_7 h^7 + \dots$$

Supposons négligeable la partie $\frac{3}{40} c_7 h^7 + \dots$ nous obtenons la formule de Stormer

$$(7)\quad \Delta^2 x_{n-1} = \gamma_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3} + \frac{19}{20}\Delta^4\gamma_{n-4}\right].$$

Cependant, on constate sans difficulté que la méthode analytique de Störmer n'est qu'un cas particulier de la méthode générale par extrapolation exposée dans ce chapitre : le cas où $\Gamma(t)$ se réduit à un polynome du 4e degré. En effet la formule (4) donne des résultats identiques à ceux de la formule (3) à condition d'y remplacer $g[x(t), t]$ par le développement en série de Taylor de la fonction $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Quant à l'élimination de c_4, c_5, c_6 entre les formules (4) et (5), en supposant les termes en c_7, c_8, ... négligeables, elle revient à assimiler la courbe inconnue $y = \gamma[x(t), t]$ (ou ce qui revient au même la courbe $y = g[x(t), t]$) à une courbe du quatrième degré passant par cinq points

$$(t_{n-4}, \gamma_{n-4}),\quad (t_{n-3}, \gamma_{n-3}),\quad \dots,\quad (t_n, \gamma_n)$$

précédemment trouvés.

Mais, en fait, il peut arriver, pour certaines fonctions, que les termes en c_7, c_8, ... ne soient pas négligeables, à moins de prendre h très petit. La méthode de Störmer ne peut plus alors être pratiquée, car elle exigerait, pour une précision suffisante, l'emploi d'un nombre de pas beaucoup trop grand.

CHAPITRE II.

APPLICATION DU PROCÉDÉ D'EXTRAPOLATION A L'INTÉGRATION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\sin t.$$

Nous avons indiqué au début de cet exposé l'intérêt que présente la solution de l'équation

$$m\frac{d^2X}{dT^2} = eE(X)\sin\omega T,$$

par exemple pour l'étude du mouvement des électrons dans un champ haute fréquence non uniforme.

Nous allons appliquer à cette équation de forme particulière la méthode générale, indiquée dans le chapitre précédent.

Donnons auparavant, pour une question de commodité, une forme simplifiée, à cette équation.

Posons

$$t = \omega T,\qquad x = \frac{\omega X}{v_0},\qquad f(x) = \frac{eE(X)}{m\omega v_0},$$

où v_0 est la vitesse initiale de l'électron à l'entrée du champ H. F. (1).

On obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\sin t.$$

I. Principe d'une nouvelle méthode d'intégration.

Le procédé de Störmer consiste, comme nous l'avons vu, à extrapoler la fonction $f(x)\sin t$ par *polynomes en t*. Cependant, d'après le chapitre qui précède, l'extrapolation de $f(x)\sin t$ par une *fonction intégrable quelconque* est admissible. On est donc naturellement conduit à espérer une amélioration possible de la méthode de Störmer, en extrapolant $f(x)$

---

(1) $x = \frac{\omega X}{v_0}$ exprimé en radians, est ce qu'on appelle l'angle de parcours « statique » de l'électron, c'est-à-dire en l'absence de champ H. F.

seul par des polynomes $\mathcal{P}(t)$ en t, et en gardant $\sin t$: la fonction $\mathcal{P}(t) \sin t$ ainsi trouvée est intégrable.

Nous comparerons du reste aux Chapitres III et IV la précision de cette méthode d'intégration avec celle de la méthode de Störmer et nous verrons ainsi quantitativement l'amélioration introduite.

II. Exposé des calculs.

Divisons l'intervalle de variation de t en intervalles partiels (t_i, t_{i+1}) tous égaux, de longueur h et supposons que nous extrapolions $f[x(t)]$ par un polynome du troisième degré.

Prenons $\tau = \dfrac{t - t_n}{h}$ et considérons par exemple le polynome du troisième degré $\mathcal{P}(\tau)$ tel que

$$\mathcal{P}(\tau_{n-3}) = f(x_{n-3}), \qquad \mathcal{P}(\tau_{n-2}) = f(x_{n-2}),$$
$$\mathcal{P}(\tau_{n-1}) = f(x_{n-1}), \qquad \mathcal{P}(\tau_n) \quad = f(x_n).$$

Ce polynome sera donné par la formule bien connue [7]

$$(8) \quad \mathcal{P}(\tau) = f_n + \tau\,\Delta f_{n-1} + \frac{\tau(\tau+1)}{2}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{6}\Delta^3 f_{n-3},$$

où l'on a posé

$$f(x_i) = f_i.$$

Remplaçons f par $\mathcal{P}$ dans l'intervalle

$$t_{n-1} \leqq t \leqq t_{n+1},$$

ce qui revient à interpoler dans (t_{n-1}, t_n) et à extrapoler dans (t_n, t_{n+1}).

x_{n+1} sera obtenue par l'une des formules (2) ou (3) du chapitre précédent, où g sera remplacé par

$$\mathcal{P}(\tau) \sin(t_n + h\tau).$$

On peut obtenir une fois pour toutes les expressions des intégrales *effectuées* [1] qui figurent dans les seconds membres de ces formules en fonction de

$$t_n, \quad f_n, \quad \Delta f_n, \quad \Delta^2 f_{n-2}, \quad \Delta^3 f_{n-3}.$$

A chaque étape de l'intégration approchée il sera nécessaire d'évaluer la valeur numérique de ces expressions. Cette évaluation constituera le seul point relativement laborieux des calculs, le reste se réduisant à effectuer des différences (telles que $\Delta^i f_{n-i}$) ou des sommes. Aussi préférera-t-on l'usage de la formule (3) où figure une seule égalité, donc une seule expression, alors qu'avec la formule (2) deux expressions sont nécessaires.

Soit donc

$$\Delta^2 x_{n-1} = h^2 \left[\int_0^1 (1-\tau)\mathcal{P}(\tau)\sin(t_n + h\tau)\,d\tau + \int_{-1}^0 (1+\tau)\mathcal{P}(\tau)\sin(t_n + h\tau)\,d\tau \right].$$

Ordonnons le polynome $\mathcal{P}(\tau)$ suivant les puissances croissantes de τ

$$\mathcal{P}(\tau) = K_0 + K_1\tau + K_2\tau^2 + K_3\tau^3$$

avec

$$K_0 = f_n,$$
$$K_1 = \Delta f_{n-1} + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2} + \frac{\Delta^3 f_{n-3}}{3},$$
$$K_2 = \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2} + \frac{\Delta^3 f_{n-3}}{3},$$
$$K_3 = \frac{\Delta^3 f_{n-3}}{3}.$$

On obtient

$$(9) \quad \Delta^2 x_{n-1} = h^2 \left\{ \int_0^1 [K_0 + (K_1 - K_0)\tau + (K_2 - K_1)\tau^2 + (K_3 - K_2)\tau^3 - K_3\tau^4] \times \sin(t_n + h\tau)\,d\tau - \int_0^{-1} [K_0 + (K_1 + K_0)\tau + (K_2 + K_1)\tau^2 + (K_3 + K_2)\tau^3 + K_3\tau^4] \times \sin(t_n + h\tau)\,d\tau \right\}$$

ou en effectuant

$$\Delta^2 x_{n-1} = h^2 \left\{ \left[\left(\frac{12 K_2}{h^4} - \frac{2K_0 + 2K_2}{h^2} \right)\cos h + \frac{8K_3}{h^3}\sin h + \frac{2K_0}{h^2} - \frac{12K_2}{h^3} \right] \sin t_n + \left[\left(\frac{36K_3}{h^4} - \frac{2K_1 + 2K_3}{h^2} \right)\sin h + \left(\frac{48K_3}{h^5} - \frac{12K_3 + 4K_1}{h^3} \right)\cos h + \frac{4K_1}{h^3} - \frac{48K_3}{h^5} \right] \cos t_n \right\}.$$

Remplaçons K_0, K_1, K_2, K_3 par leurs valeurs en fonction de f_n, Δf_{n-1}, $\Delta^2 f_{n-2}$, $\Delta^2 f_{n-3}$, il vient

$$\Delta^2 x_{n-1} = 2f_n(1 - \cos h)\sin t_n + \Delta f_{n-1}\left[\frac{4}{h}(1 - \cos h) - 2\sin h \right]\cos t_n + \Delta^2 f_{n-2}\left\{ \left[\frac{4\sin h}{h} - \cos h + \frac{6(\cos h - 1)}{h^2} \right]\sin t_n + \left[\frac{2}{h}(1 - \cos h) - \sin h \right]\cos t_n \right\}$$

---

[1] ou de leur somme.

$$+\Delta^3 f_{n-3}\left\{\left[\frac{6}{h^2}(\cos h - 1) - \cos h + \frac{4\sin h}{h}\right]\sin t_n + \left[\left(\frac{6}{h^2}-1\right)\sin h + \left(\frac{8}{h^3}-\frac{10}{3h}\right)\cos h + \frac{4}{3h} - \frac{8}{h^3}\right]\cos t_n\right\}.$$

Cette expression se met sous la forme

$$(10)\quad \Delta^2 x_{n-1} = A_n f_n + B_n \Delta f_{n-1} + C_n \Delta^2 f_{n-2} + D_n \Delta^3 f_{n-3}$$

où A_n, B_n, C_n, D_n sont fonctions seulement de h et de t_n.

Lorsque h est assez faible pour qu'on puisse négliger les termes en h^4 et au-delà dans les coefficients des différences, on obtient en développant en série, les expressions simplifiées ci-dessous ([1]) :

$$(11)\quad \Delta^2 x_{n-1} \# 2 f_n(1-\cos h)\sin t_n + \Delta f_{n-1}\frac{h^3}{6}\cos t_n + \Delta^2 f_{n-2}\left(\frac{h^2}{12}\sin t_n + \frac{h^3}{12}\cos t_n\right) + \Delta^3 f_{n-3}\left(\frac{h^2}{12}\sin t_n + \frac{h^3}{15}\cos t_n\right).$$

TABLEAU I. — *Valeur des coefficients A_n, B_n, C_n, D_n, pour différents pas.*

t_n.	A_n.	B_n.	C_n.	D_n.
Pas $h = \frac{\pi}{12}$.				
0	0	0,003	0,0015	0,001
$\frac{\pi}{12}$	0,018	0,003	0,003	0,002
$\frac{\pi}{6}$	0,034	0,0026	0,004	0,004
$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}$	0,048	0,002	0,005	0,0046
$\frac{\pi}{3}$	0,059	0,0015	0,0055	0,005
$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$	0,066	0,0008	0,006	0,006
$\frac{\pi}{2}$	0,068	0	0,0055	0,0056
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$	0,066	−0,0008	0,005	0,005
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	0,059	−0,0015	0,004	0,004
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}$	0,048	−0,002	0,003	0,003
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$	0,034	−0,0026	0,0015	0,002
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$	0,018	−0,003	0	0

t_n.	A_n.	B_n.	C_n.	D_n.
Pas $h = \frac{\pi}{6}$.				
0	0	0,024	0,012	0,009
$\frac{\pi}{6}$	0,134	0,020	0,021	0,019
$\frac{\pi}{3}$	0,232	0,012	0,025	0,023
$\frac{\pi}{2}$	0,268	0	0,022	0,022
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	0,232	−0,012	0,013	0,015
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$	0,134	−0,020	0,001	0,003
Pas $h = \frac{\pi}{3}$.				
0	0	0,178	0,089	0,070
$\frac{\pi}{3}$	0,866	0,089	0,107	0,097
$2\frac{\pi}{3}$	0,866	−0,089	0,018	0,027

Remarque. — La valeur des coefficients pour $t = t_n + \pi$ est égale à la valeur correspondante pour t_n changée de signe.

([1]) On retrouve directement la formule (11) en remplaçant dans les intégrales (9)

$$\sin(t_n + h\tau) = \sin t_n \cos h\tau + \cos t_n \sin h\tau$$

par sa valeur approchée

$$\sin t_n + h\tau \cos t_n.$$

Remarque. — Les formules données pour $\Delta^2 x_{n-1}$ se rapprochent de celles données par la méthode de Störmer, mais elles font figurer $\Delta^i f$ au lieu de $\Delta^i (f \sin t)$ et tiennent compte de la différence première. Si $f(x)$ était constant ou se réduisait à un polynome en t lorsque x serait remplacé par sa fonction en t, la méthode indiquée ci-dessus donnerait des résultats identiques à ceux de l'intégration exacte, à condition de prendre les différences jusqu'à la $k^{\text{ième}}$, si le polynome est du degré k.

La méthode de Störmer, par contre, donne toujours des résultats approximatifs.

III. **Disposition pratique des calculs.**

Il est nécessaire de calculer A_n, B_n, C_n, D_n. Ces coefficients varient avec t_n et avec le pas adopté. On les détermine à l'avance (*voir* Tableau I). Une disposition avantageuse des calculs d'intégration numérique comportera douze colonnes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	x	Δx	$\Delta^2 x$	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$A f$	$B \Delta f$	$C \Delta^2 f$	$D \Delta^3 f$

x_n s'écrira sur la ligne n, Δx_{n-1} sur la ligne $n-1$, $\Delta^2 x_{n-2}$ sur la ligne $n-2$.

Quant aux termes des colonnes suivantes, ils seront sur la ligne correspondant au dernier indice dont ils sont affectés, ainsi :

$A_n f_n$ sera sur la ligne n,
$B_n \Delta f_{n-1}$ » $n-1$,
$C_n \Delta^2 f_{n-2}$ » $n-2$,
$D_n \Delta^3 f_{n-3}$ » $n-3$.

Pour le calcul des points initiaux servant de départ au tableau, on se reportera à l'annexe I et au tableau IV correspondant.

Remarquons que, comme pour la méthode de Störmer, deux conditions en cours de calcul doivent nécessairement être satisfaites pour que l'approximation atteinte puisse être jugée acceptable :

1° Les dernières différences $\Delta^3 f_{n-3}$ retenues doivent osciller assez faiblement pour que les différences suivantes n'influent pas sur les résultats du calcul. Sinon ce calcul est sujet à erreur, car il n'y a aucune raison, *a priori*, pour retenir $\Delta^3 f_{n-3}$ et négliger les $\Delta^4 f_{n-4}$.

Du reste, l'erreur du calcul au bout d'un pas est, comme nous le verrons dans le Chapitre III, proportionnelle à $\frac{d^4 f[x(t)]}{dt^4}$, donc sensiblement à $\Delta^4 f$ qui, par suite, doit être petit.

2° Ainsi qu'il a été dit aux Chapitres I et II, il faut, pour qu'une méthode d'intégration approchée convienne, que la grandeur du segment $P_{n+1} P'_{n+1}$ soit faible. Or, ici (*fig.* 2)

$$\overline{JP_{n+1}} = f_{n+1},$$
$$\overline{JP'_{n+1}} = f_n + \Delta f_{n-1} + \Delta^2 f_{n-2} + \Delta^3 f_{n-3}.$$

Il faut donc que

$$f_{n+1} \# f_n + \Delta f_{n-1} + \Delta^2 f_{n-2} + \Delta^3 f_{n-3}.$$

Remarque. — L'étude qui a été faite dans ce chapitre s'étend immédiatement à toutes les équations du type

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)\,\varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ est une fonction intégrable quelconque.

On aboutit également à la formule

$$\Delta^2 x_{n-1} = A'_n f_n + B'_n \Delta f_{n-1} + C'_n \Delta^2 f_{n-2} + D'_n \Delta^3 f_{n-3};$$

mais si $\varphi(t)$ est autre que $\sin t$, A'_n, B'_n, C'_n, D'_n, diffèrent, naturellement, des coefficients A_n, B_n, C_n, D_n trouvés dans le cas particulier où $\varphi(t) = \sin t$.

CHAPITRE III.

SUR LES ERREURS ENTRAINÉES PAR L'INTÉGRATION APPROCHÉE.

Nous allons dans ce qui suit évaluer les erreurs entraînées dans l'application de la méthode de Störmer et de la nouvelle méthode, après le premier pas. Puis, nous allons esquisser une étude générale du cumul des erreurs après n étapes.

I. **Erreur après le premier pas.**

1. *Cas de la méthode de Störmer.* — Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g(x, t).$$

Supposons les points initiaux

$$(t_{-4}, x_{-4}),\quad (t_{-3}, x_{-3}),\quad \ldots,\quad (t_0, x_0)$$

connus exactement et appelons η_0 l'erreur commise sur $\Delta^2 x_{-1}$ dans ces hypothèses.

Il est évident, en rapprochant les formules (6) et (7) du Chapitre I que l'on aura

$$\eta_0 = \frac{3}{40} h^7 \frac{d^7 x_0}{dt^7} + \dots \quad (1). \tag{12}$$

C'est le résultat donné par Störmer [3] et Kryloff [5] et trouvé, comme nous venons de le faire ici, à l'aide des développements en séries de Taylor.

Cependant l'interprétation géométrique de la méthode de Störmer permet de trouver une nouvelle évaluation de l'erreur, basée sur des résultats connus de la théorie de l'interpolation et de l'extrapolation.

Revenons à la figure 2 où l'on aura posé l'indice n égal à zéro.

La méthode de Störmer revient à assimiler dans l'intervalle (t_{-1}, t_{+1}) la courbe $y = g[x(t), t]$ à la courbe approchée $y = p(t)$ passant par les points

$$P_{-4},\quad P_{-3},\quad P_{-2},\quad P_{-1},\quad P_0,$$

$p(t)$ étant un polynome du quatrième degré.

D'après un théorème de Cauchy [1] relatif à l'approximation obtenue par interpolation et extrapolation à l'aide de polynomes, on a

$$|g[x(t), t] - p(t)| \leq \max \left| \frac{d^5 g[x(t), t]}{dt^5} \right| \left| \frac{(t - t_{-4})(t - t_{-3}) \dots (t - t_0)}{5!} \right|. \tag{13}$$

Si

$$t_{-1} < t < t_{+1},$$

le maximum de

$$\left| \frac{d^5 g}{dt^5} \right|$$

est pris pour des valeurs de t intérieures à ce segment.

Or, d'après la formule (3), on a exactement, en posant encore

$$\tau = \frac{t - t_0}{h},$$

$$\Delta^2 x_{-1} = h^2 \left[\int_0^1 (1 - \tau) g[x(t_0 + h\tau), t_0 + h\tau] \, d\tau + \int_{-1}^0 (1 + \tau) g[x(t_0 + h\tau), t_0 + h\tau] \, d\tau \right],$$

tandis que la méthode de Störmer revient à calculer

$$\overline{\Delta^2 x_{-1}} = h^2 \left[\int_0^1 (1 - \tau) p[t_0 + h\tau] \, d\tau + \int_{-1}^0 (1 + \tau) p[t_0 + h\tau] \, d\tau \right];$$

d'où, en posant

$$g = g[x(t_0 + h\tau), t_0 + h\tau] \quad \text{et} \quad p = p[t_0 + h\tau],$$

$$|\eta_0| = |\Delta^2 x_{-1} - \overline{\Delta^2 x_{-1}}| \leq h^2 \left[\int_0^1 (1 - \tau) |g - p| \, d\tau + \int_{-1}^0 (1 + \tau) |g - p| \, d\tau \right];$$

d'où, d'après la formule (13), en effectuant le changement de variable de t en τ,

$$|\eta_0| \leq \frac{h^7}{5!} \max_{t_{-1} < t < t_{+1}} \left| \frac{d^7 x}{dt^7} \right| \times \left[\int_0^1 (1 - \tau) \tau (\tau + 1)(\tau + 2)(\tau + 3)(\tau + 4) \, d\tau + \int_{-1}^0 (1 - \tau)(-\tau)(\tau + 1)(\tau + 2)(\tau + 3)(\tau + 4) \, d\tau \right]$$

ou

$$|\eta_0| \leq \frac{7}{72} h^7 \max_{t_{-1} < t < t_{+1}} \left| \frac{d^7 x}{dt^7} \right|. \tag{14}$$

Bien que cette formule ait un coefficient d'environ 25 % plus élevé que celui de (12), elle est bien plus maniable : elle ne comporte en effet qu'un terme unique, alors que la formule (12) en implique, sous sa forme rigoureuse, une infinité se succédant avec des puissances de h croissantes.

Si les différences $\Delta^i \gamma$ n'étaient retenues que jusqu'à la troisième, c'est-à-dire si l'on extrapolait par polynome du troisième degré, on obtiendrait par un procédé analogue

$$|\eta_0| \leq \frac{13}{120} h^6 \max_{t_{-1} < t < t_{+1}} \left| \frac{d^6 x}{dt^6} \right|. \tag{15}$$

2. *Cas de la nouvelle méthode appliquée à l'équation* $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \sin t$. — Le calcul de l'approximation peut s'effectuer par l'un ou l'autre des deux procédés que nous avons indiqués au sujet de l'erreur dans la méthode de Störmer. Nous utiliserons le second, qui est nouveau, et dont on a déjà mentionné les avantages.

Supposons encore que l'on connaisse f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_0 d'une façon exacte. On aura par le théorème de Cauchy déjà cité

$$f[x(t)] - \mathfrak{P}(t) = \frac{d^4 f[x(\theta)]}{dt^4} \frac{(t - t_{-3})(t - t_{-2})(t - t_{-1})(t - t_0)}{4!} \tag{16}$$

---

(1) Par un procédé analogue on obtiendrait, si les différences $\Delta^i \gamma$ n'étaient retenues que jusqu'au troisième ordre

$$\eta_0 = \frac{17}{215} h^6 \frac{d^6 x}{dt^6} + \dots \tag{12 bis}$$

avec

$$t_{-1} \leq \theta \leq t.$$

Désignons par $\Delta^2 x_{-1}$, la différence seconde exacte, par $\overline{\Delta^2 x_{-1}}$ la différence seconde obtenue par intégration approchée. Tout comme dans le calcul analogue au sujet de l'erreur dans la méthode de Störmer, on aura

$$\begin{aligned} |\eta_0^1| &= |\Delta^2 x_{n-1} - \overline{\Delta^2 x_{n-1}}| \\ &\leq h^2 \left[\left| \int_0^1 (1-\tau)(f-\mathcal{F}) \sin(t_0 + h\tau)\, d\tau \right| \right. \\ &\qquad \left. + \left| \int_{-1}^0 (1+\tau)(f-\mathcal{F}) \sin(t_0 + h\tau)\, d\tau \right| \right], \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\tau = \frac{t - t_0}{h}; \qquad f = f(t_0 + h\tau); \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}(t_0 + h\tau).$$

Par suite de (16)

$$\begin{aligned} |\eta_0^1| \leq \frac{h^6}{4!} \max_{t_{-1}<t<t_{+1}} \left| \frac{d^4 f[x(t)]}{dt^4} \right| \\ \times \left[\left| \int_0^1 (1-\tau)\tau(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3) \sin(t_n + h\tau)\, d\tau \right| \right. \\ \left. + \left| \int_{-1}^0 (1+\tau)\tau(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3) \sin(t_n + h\tau)\, d\tau \right| \right]. \end{aligned}$$

Ces intégrales sont du type déjà rencontré au cours des calculs de ce chapitre. Elles aboutissent à des expressions assez longues, sous leur forme complète (¹).

Dans le cas des faibles valeurs de h on obtient la formule simplifiée suivante :

$$(17) \qquad \begin{aligned} |\eta_0^1| \leq \frac{h^6}{24} \max_{t_{-1}<t<t_{+1}} \left| \frac{d^4 f[x(t)]}{dt^4} \right| \\ \times \left[\left| \frac{27}{12} \sin t_0 + \frac{107}{84} h \cos t_0 \right| \right. \\ \left. + \left| \frac{7}{20} \sin t_0 - \frac{53}{420} h \cos t_0 \right| \right]. \end{aligned}$$

En comparant les formules (15) et (17) on constate qu'elles sont du même ordre, avec, comme différence que dans la formule (17) $\frac{d^4 f}{dt^4}$ remplace

$$\frac{d^4 \left[f[x(t)] \sin t \right]}{dt^4}.$$

La méthode exposée sera donc avantageuse dans les cas où l'on aura

$$\left| \frac{d^4 f}{dt^4} \right| < \left| \frac{d^4 \left[f[x(t)] \sin t \right]}{dt^4} \right|.$$

Ceci se produit fréquemment en pratique.

II. **Erreur après *n* pas.**

Les auteurs qui se sont occupés de la méthode d'intégration approchée de Störmer se sont toujours limités au calcul de l'erreur après le premier pas.

La formule obtenue pour cette erreur ne peut s'appliquer au delà de cette étape initiale car les points P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-4} (*fig.* 2) à partir desquels s'effectue l'extrapolation ne sont pas connus de façon exacte; ils sont obtenus eux-mêmes par suite des extrapolations et des calculs qui précèdent, et par ce fait les erreurs ont tendance à cumuler. Aussi, l'évaluation de l'erreur après n pas est-elle un « problème bien difficile » comme le dit Störmer **[3]** qui ne l'aborde d'ailleurs pas.

La question a pourtant une importance fondamentale, car une méthode d'approximation n'a vraiment d'intérêt que lorsqu'on connaît la borne supérieure de l'erreur commise.

Nous allons dans ce qui suit en esquisser une étude en supposant que l'intégration approchée faite par la méthode de Störmer, est limitée aux différences troisièmes.

Comme au Chapitre I nous désignerons les quantités exactes par

$$x_i, \quad \Delta x_i, \quad \Delta^2 x_i, \quad \gamma_i, \quad \Delta^2 \gamma_i, \quad \Delta^3 \gamma_i,$$

les quantités approchées, calculées par la méthode de Störmer par

$$\overline{x_i}, \quad \overline{\Delta x_i}, \quad \overline{\Delta^2 x_i}, \quad \gamma_i, \quad \overline{\Delta^2 \gamma_i}, \quad \overline{\Delta^3 \gamma_i}.$$

(¹) La formule complète de l'erreur, dans le cas général, serait

$$|\eta_0| \leq \frac{h^6}{24} \max_{t_{-1}<t<t_{+1}} \left| \frac{d^4 f[x(t)]}{dt^4} \right| |c_0 + d_0|,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} c_0 = \Big\{ & \cos t_0 \Big[\left(\frac{240}{h^5} - \frac{100}{h^3} \right) \cos h \\ & \quad + \left(-\frac{120}{h^6} + \frac{210}{h^4} - \frac{24}{h^2} \right) \sin h - \left(\frac{120}{h^5} + \frac{10}{h^3} \right) \Big] \\ & + \sin t_0 \Big[\left(-\frac{120}{h^6} + \frac{210}{h^4} - \frac{24}{h^2} \right) \cos h \\ & \quad - \left(\frac{240}{h^5} - \frac{100}{h^3} \right) \sin h + \left(\frac{120}{h^6} - \frac{30}{h^4} - \frac{6}{h^2} \right) \Big] \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0 = \Big\{ & \cos t_0 \Big[\left(-\frac{48}{h^5} - \frac{4}{h^3} \right) \cos h \\ & \quad - \left(\frac{120}{h^6} + \frac{6}{h^4} \right) \sin h + \left(\frac{168}{h^5} - \frac{34}{h^3} \right) \Big] \\ & + \sin t_0 \Big[\left(\frac{120}{h^5} + \frac{6}{h^4} \right) \cos h \\ & \quad - \left(\frac{48}{h^5} + \frac{4}{h^3} \right) \sin h + \left(-\frac{120}{h^6} + \frac{102}{h^4} - \frac{6}{h^2} \right) \Big] \Big\}. \end{aligned}$$

On a

$$\Delta^2 x_{n-1} = \gamma_n + \frac{1}{12}[\Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3}] + \eta_n$$

où

$$|\eta_n| \leq \frac{13}{120} h^6 \max_{t_{n-1}<t<t_{n+1}} \left|\frac{d^6 x}{dt^6}\right|,$$

extension de la formule (15) applicable ici,

$$\gamma_n + \frac{1}{12}[\Delta^2\gamma_{n-1} + \Delta^3\gamma_{n-3}]$$

représentant la valeur de $\Delta^2 x_{n-1}$ obtenue par extrapolation à partir des points P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} dont on aurait connu la position exacte.

Par ailleurs

$$\overline{\Delta^2 x_{n-1}} = \overline{\gamma_n} + \frac{1}{12}\left[\overline{\Delta^2\gamma_{n-2}} + \overline{\Delta^3\gamma_{n-3}}\right] - \nu_n,$$

ν_n étant l'erreur numérique due au fait que dans l'expression du quotient de $\Delta^2\gamma_{n-1} + \Delta^3\gamma_{n-3}$ par 12, seul un nombre fini de chiffres a été retenu.

Par suite

$$(18)\quad \Delta^2 x_{n-1} - \overline{\Delta^2 x_{n-2}}$$
$$= \gamma_n - \overline{\gamma_n} + \frac{1}{12}\Big[\ \Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3}$$
$$- \overline{\Delta^2\gamma_{n-2}} - \overline{\Delta^3\gamma_{n-3}}\Big] + \eta_n - \nu_n$$
$$= \gamma_n - \overline{\gamma_n} + \frac{1}{12}\Big[\ 2(\gamma_n - \overline{\gamma_n}) - 5(\gamma_{n-1} - \overline{\gamma_{n-1}})$$
$$+ 4(\gamma_{n-2} - \overline{\gamma_{n-2}}) - (\gamma_{n-3} - \overline{\gamma_{n-3}})\Big]$$
$$+ \eta_n - \nu_n.$$

Or, les erreurs sur γ_n ont trois causes :

1° x_n à partir duquel $\overline{\gamma_n}$ se déduit n'est connu que par sa valeur approchée $\overline{x_n}$.

On peut écrire

$$\gamma(x_n, t_n) - \gamma(\overline{x_n}, t_n) = \frac{\partial\gamma(x_n^1, t_n)}{\partial x}(x_n - \overline{x_n}),$$

où x_n^1 est compris entre x_n et $\overline{x_n}$.

2° $\gamma(\overline{x_n}, t_n) = h^2 g(\overline{x_n}, t_n)$ où $g(\overline{x_n}, t_n)$ est souvent obtenu par lecture sur un graphique qui en donne une valeur approchée, que nous désignerons par $g'(\overline{x_n}, t_n)$ entachée d'une erreur de lecture λ_n. On a par suite, pour la valeur correspondante de $\gamma'(\overline{x_n}, t_n)$, une erreur égale à $h^2\lambda_n$.

3° Dans l'expression numérique du produit de $h^2 \times g'(\overline{x_n}, t_n)$ seul un nombre fixé de chiffres significatifs est retenu, d'où une erreur systématique ν_n^1.

Par suite

$$\gamma(x_n, t_n) - \overline{\gamma_n} = \gamma(x_n, t_n) - \gamma(\overline{x_n}, t_n) + \gamma(\overline{x_n}, t_n)$$
$$- \gamma'(\overline{x_n}, t_n) + \gamma'(\overline{x_n}, t_n) - \overline{\gamma_n},$$

$$|\gamma(x_n, t_n) - \overline{\gamma_n}|$$
$$\leq \left|\frac{\partial\gamma(x_n^1, t_n)}{\partial x}\right| |x_n - \overline{x_n}| + h^2|\lambda_n| + |\nu_n^1|.$$

D'où, d'après (18),

$$|\Delta^2 x_{n-1} - \overline{\Delta^2 x_{n-1}}|$$
$$\leq \left|\frac{\partial\gamma(x_n^1, t_n)}{\partial x}(x_n - \overline{x_n})\right|$$
$$+ \frac{1}{12}\Big[\ 2\left|\frac{\partial\gamma(x_n^1, t_n)}{\partial x}(x_n - \overline{x_n})\right|$$
$$+ 5\left|\frac{\partial\gamma(x_{n-1}^1, t_{n-1})}{\partial x}(x_{n-1} - \overline{x_{n-1}})\right|$$
$$+ 4\left|\frac{\partial\gamma(x_{n-2}^1, t_{n-2})}{\partial x}(x_{n-2} - \overline{x_{n-2}})\right|$$
$$+ \left|\frac{\partial\gamma(x_{n-3}^1, t_{n-3})}{\partial x}(x_{n-3} - \overline{x_{n-3}})\right|\Big]$$
$$+ h^2|\lambda_n| + |\nu_n^1|$$
$$+ \frac{1}{12}[\ 2h^2|\lambda_n| + 2|\nu_n^1| + 5h^2|\lambda_{n-1}| + 5|\nu_{n-1}^1|$$
$$+ 4h^2|\lambda_{n-2}| + 4|\nu_{n-2}^1| + h^2|\lambda_{n-3}| + |\nu_{n-3}^1|]$$
$$+ |\eta_n| + |\nu_n|.$$

Appelons :

ν, la borne supérieure stricte de l'ensemble des nombres $|\nu_n|$, $|\nu_n^1|$;

λ, la borne supérieure stricte de l'ensemble des nombres $|\lambda_n|$;

δ, le maximum dans le domaine d'intégration de $\frac{13}{120}\left|\frac{d^6 x}{dt^6}\right|$,

μ, le maximum dans le domaine d'intégration de $\frac{\partial g(x, t)}{\partial x}$;

il vient

$$(19)\quad |\Delta^2 x_{n-1} - \overline{\Delta^2 x_{n-1}}|$$
$$\leq h^2\mu|x_n - \overline{x_n}|$$
$$+ \frac{h^2\mu}{12}\Big[\ 2|x_n - \overline{x_n}| + 5|x_{n-1} - \overline{x_{n-1}}|$$
$$+ 4|x_{n-2} - \overline{x_{n-2}}| + |x_{n-3} - \overline{x_{n-3}}|\Big]$$
$$+ 3\nu + 2h^2\lambda + h^6\delta.$$

Désignons par ε_n l'erreur commise sur Δx_n et $\mathcal{E}_n$ celle commise sur x_n.

$$\varepsilon_n = \Delta x_n - \overline{\Delta x_n}, \qquad \mathcal{E}_n = x_n - \overline{x_n}.$$

On a

$$\Delta^2 x_{n-1} - \overline{\Delta^2 x_{n-1}} = (\Delta x_n - \overline{\Delta x_n}) - (\Delta x_{n-1} - \overline{\Delta x_{n-1}}),$$
$$= \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1},$$

d'où, si l'on suppose x_0 connu sans erreur appréciable,

$$(20)\qquad \mathcal{E}_n = x_n - \overline{x_n} = \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta x_i - \overline{\Delta x_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i.$$

Si l'on pose

$$k = 3\nu + 2h^2\lambda + h^6\delta,$$
$$\alpha = h^2\mu,$$

la formule (19) peut alors s'écrire

$$|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| \leq \alpha \left|\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i\right| + \frac{\alpha}{12}\left[2\left|\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i\right| + 5\left|\sum_{i=0}^{n-2}\varepsilon_i\right| + 4\left|\sum_{i=0}^{n-3}\varepsilon_i\right| + \left|\sum_{i=0}^{n-4}\varepsilon_i\right|\right] + k$$

$$< \frac{7}{6}\alpha|\varepsilon_{n-1}| + \alpha\left|\sum_{i=0}^{n-2}\varepsilon_i\right| + \frac{\alpha}{12}\left[2\left|\sum_{i=0}^{n-2}\varepsilon_i\right| + 5\left|\sum_{i=0}^{n-2}\varepsilon_i\right| + 4\left|\sum_{i=0}^{n-2}\varepsilon_i\right| + \left|\sum_{i=0}^{n-2}\varepsilon_i\right|\right] + k,$$

Nous obtiendrons une borne supérieure de l'erreur en majorant les $|\varepsilon_i|$ par des termes donnés par une loi plus simple.

A cet effet considérons les nombres positifs e_n définis par

$$(21)\qquad e_n = e_{n-1}\left(1 + \frac{7}{6}\alpha\right) + 2\alpha\sum_{i=0}^{n-2} e_i + k.$$

Si l'on pose

$$(22)\qquad e_0 = k \qquad \text{avec} \quad k \geq |\varepsilon_0|,$$

on aura

$$e_1 > |\varepsilon_1|$$

et par récurrence

$$e_n > |\varepsilon_n|.$$

La solution peut être obtenue, en remplaçant e_n par $\mathcal{A}a^n + \mathcal{B}b^n$ dans les égalités (21) et (22) qui doivent être vérifiées quel que soit n : cela détermine les valeurs de a, b, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et il vient

$$e_n = \frac{k}{2\sqrt{\frac{49}{144}\alpha^2 + 2\alpha}}\left[\left(1 + \frac{7}{12}\alpha + \sqrt{\frac{49}{144}\alpha^2 + 2\alpha}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{7}{12}\alpha - \sqrt{\frac{49}{144}\alpha^2 + 2\alpha}\right)^{n+1}\right].$$

Or, l'erreur qui importe est souvent l'erreur $\mathcal{E}_N$ commise sur x_N, où N désigne le numéro du dernier pas [1].

Si l'on pose

$$E_N = \sum_{i=0}^{N-1} e_i,$$

on a, d'après (20),

$$|\mathcal{E}_N| < E_N.$$

Évaluons donc E_N; on obtient sans difficulté

$$(23)\qquad E_N = \frac{k}{4\alpha\sqrt{\;}}\times\left[\left(1 + \frac{7}{12}\alpha - \sqrt{\;}\right)^{N+1}\times\left(\frac{7}{12}\alpha + \sqrt{\;}\right) - \left(1 + \frac{7}{12}\alpha + \sqrt{\;}\right)^{N+1}\times\left(\frac{7}{12}\alpha - \sqrt{\;}\right) - 2\sqrt{\;}\right]$$

où l'on désigne par $\sqrt{\;}$ la quantité $\sqrt{\frac{49}{144}\alpha^2 + 2\alpha}$.

N est relié à la longueur totale L de l'intervalle d'intégration par

$$N = \frac{L}{h} \quad [2].$$

Un examen approfondi de la formule (23) permettrait de connaître le choix le plus judicieux à faire de ν, de λ et de h, lorsqu'on vise à une précision donnée. Contentons-nous de remarquer que l'erreur due au principe même de l'approximation de Störmer se traduit par le terme $h^6\delta$ qui intervient dans k, et qu'il est logique et souvent avantageux de rendre les autres causes d'erreur — dont on dispose librement — négligeables devant cette erreur qu'on ne peut modifier. Ceci fixe l'ordre de grandeur de ν et λ que l'on aura à prendre pour une précision, donc pour un pas, donnés.

---

(1) On a souvent intérêt dans les problèmes physiques de connaître l'erreur sur $\frac{\Delta x_N}{h}$, quantité qui est assimilable à une vitesse (par exemple, vitesse d'un électron à la sortie du champ H. F.). Cette erreur est naturellement égale à $\frac{\varepsilon_N}{h}$ donc inférieure à $\frac{e_N}{h}$.

(2) Notons que si $\mu \to 0$ on constate d'après la formule (23) que E_N tend vers $\frac{N(N+1)}{2}k$. Cette valeur est du reste atteinte pour $\mu = 0$, comme le met en évidence la formule (21) qui définit alors les e_i comme les termes d'une progression arithmétique de raison k.

Voyons comment varie la borne supérieure E_N de l'erreur sur x_N lorsque h tend vers zéro. Dans ce cas α tend vers zéro et N vers l'infini, et l'on déduit sans difficulté de (23) que E_N a une partie principale égale à

$$\frac{3\nu + 2h^2\lambda + h^6\delta}{2\mu h^2}\left[\operatorname{ch} L\sqrt{2\mu} - 1\right].$$

On voit sur cette formule que l'approximation due au principe de la méthode entraîne une erreur inférieure à $\frac{\delta}{2\mu}h^4\left[\operatorname{ch}L\sqrt{2\mu}-1\right]$, quantité qui tend vers zéro avec h.

Pour que l'erreur totale tende vers zéro il suffirait que pour chaque pas on choisisse ν et λ tels que $\frac{\nu}{h^2}$ et λ tendent vers zéro avec h.

Si l'on néglige cette précaution E_N tend vers une constante, ou même vers une valeur infinie $\Big($ce dernier cas se produisant quand $\frac{\nu}{h^2}$ tend vers l'infini, h tendant vers zéro$\Big)$. Il y a donc dans ce cas une valeur optimum de h différente de zéro, et donnant à E_N une valeur minimum.

Ceci confirme la remarque de Störmer, qui constate lors de ses calculs numériques [3] — sans en expliquer d'ailleurs l'origine et le mécanisme — que les résultats obtenus deviennent moins précis lorsqu'on augmente le nombre de pas au delà d'une certaine limite. Ce fait n'aurait pas lieu si dans ces calculs, ν et λ diminuaient avec le pas, suivant la loi indiquée.

Un procédé analogue à celui que nous venons de développer permettrait d'évaluer l'erreur après n pas, lors de l'application de la nouvelle méthode d'intégration à l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\sin t$, méthode développée au Chapitre II. On obtiendrait une formule analogue à la formule (23), mais où $\eta = h^6\delta$ sera remplacé par la valeur η^1 indiquée à la formule (17), où le maximum de $\left|\frac{d^4 f[x(t)]}{dt^4}\right|$ sera pris pour t variant sur tout le segment d'intégration.

Or, on a déjà remarqué que dans la plupart des cas usuels $|\eta^1| < |\eta|$. Par suite l'approximation après n pas sera généralement meilleure avec la nouvelle méthode.

CHAPITRE IV.

Comparaison, sur des exemples numériques, de la nouvelle méthode avec la méthode de Störmer.

Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\sin t.$$

Comparons d'abord le nombre et la difficulté des opérations à effectuer par la méthode de Störmer et par la nouvelle méthode.

La méthode de Störmer nécessite :

1° La lecture de f_n puis le produit de f_n par $h^2 \sin t_n$

$$\gamma_n = h^2 f_n \sin t_n.$$

2° La formation des différences successives

$$\Delta\gamma_{n-1},\quad \Delta^2\gamma_{n-2},\quad \Delta^3\gamma_{n-3},\quad \Delta^4\gamma_{n-4}.$$

3° La somme de ces différences, moins un terme facilement calculable,

$$\Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3} + \Delta^4\gamma_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\gamma_{n-4}.$$

4° Le quotient de la somme ainsi obtenue par 12

$$\frac{1}{12}\left[\Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3} + \Delta^4\gamma_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\gamma_{n-4}\right].$$

5° La somme

$$\gamma_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3} + \Delta^4\gamma_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\gamma_{n-4}\right].$$

La nouvelle méthode nécessite :

1° La formation de

$$f_n,\quad \Delta f_{n-1},\quad \Delta^2 f_{n-2},\quad \Delta^3 f_{n-3}.$$

2°, 3°, 4°, 5° le produit de ces termes par des facteurs variant avec t_n

$$A_n f_n,\quad B_n\Delta f_{n-1},\quad C_n\Delta^2 f_{n-2},\quad D_n\Delta^3 f_{n-3}.$$

6° La somme

$$A_n f_n + B_n\Delta f_{n-1} + C_n\Delta^2 f_{n-2} + D_n\Delta^3 f_{n-3}.$$

Comparons la longueur et la difficulté de ces opérations. A ce point de vue les étapes A — 2° et A — 3° sont équivalents à B — 1° et B — 6°, A — 1° est également du même ordre que B — 2°, mais les opérations simples A 1°—4°—5° sont remplacées par les produits B 3°—4°—5°.

La nouvelle méthode sera donc avantageuse lorsqu'à précision égale elle entraîne, soit une économie du nombre des différences $\Delta^i f$ à retenir, soit une *économie du nombre de pas*.

Nous avons comparé les deux méthodes dans les exemples empruntés au mouvement des électrons dans les champs H. F. non uniformes [1].

Voici les résultats obtenus :

La nouvelle méthode, qui évite l'extrapolation

[1] *Voir* Introduction et début du Chapitre II.

Tableau II. — *Nouvelle méthode d'intégration de l'équation*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\sin t, \qquad \text{où l'on a} \quad f(x) = \frac{1}{10}\sin\frac{x-10}{5}.$$

$21460 < x.10^4 < 178540$. (La phase d'entrée de l'électron dans le champ a été prise nulle.)

t_n.	x_n.	Δx_{n-1}.	$\Delta^2 x_{n-2}$.	f_n.	Δf_{n-1}.	$\Delta^2 f_{n-2}$.	$\Delta^3 f_{n-3}$.	$A_n f_n$.	$B_n \Delta f_{n-1}$.	$C_n \Delta^2 f_{n-2}$.	$D_n \Delta^3 f_{n-3}$.
0..........	21460	10291	−846	−1000	+ 21	+35	−11	0	+ 1,9	+0,6	+1,1
$\frac{\pi}{3}$..........	31751	9445	−803,7	− 979	+ 56	+24	+ 1	−847,8	− 5	−2,4	−0,1
$\frac{2\pi}{3}$........	41196	8641,3	− 15,5	− 923	+ 80	+25	+ 6	−799,3	−14,2	−2,6	−0,16
π..........	49837,9	8625,8	+627	− 843	+105	+31	0	0	− 9,3	−0,56	0
$\pi + \frac{\pi}{3}$.....	58463,1	9252,8	+532,7	− 738	+136	+31	−14	+ 63,9	+12,1	+2,75	−1,3
$\pi + \frac{2\pi}{3}$....	67715,9	9785,5	+ 32,5	− 602	+167	+17	−11	+521,3	+29,7	+1,8	−0,3
2π.........	77501,4	9818	−200,5	− 435	+184	+ 6	− 5,6	0	+16,3	+0,1	+0,4
$2\pi + \frac{\pi}{3}$....	87319,4	9617,5	− 70	− 251	+190	+ 0,4	− 5,7	−217,3	−17	−0,04	+0,55
$2\pi + \frac{2\pi}{3}$...	96936,9	9547,5	− 33,4	− 61	+190,4	− 5,3	−11	− 52,8	−33.8	+0,57	+0,3
3π.........	106484,4	9514,1	−287,4	+ 129,4	+185,1	−16,3	− 6,1	0	−16,5	+2,94	−0,42
$3\pi + \frac{\pi}{3}$....	115998,5	9226,4	−400,3	+ 314,5	+168,8	−22,4	+ 3	−274,3	+15	−2	+0,3
$3\pi + \frac{2\pi}{3}$...	125224,9	8826,1	+ 23,6	+ 483,3	+146,4	−19,4	+ 2,5	−418,5	+26	−2	+0,1
4π.........	134051	8849,7	+664,6	+ 629,7	+126,9	−16,9	− 9,7	0	+11,3	−0,3	+0,7
$4\pi + \frac{\pi}{3}$....	142900,7	9514,3	+740,5	+ 756,6	+110	−26,6		+655	− 9,8	+2,4	
$4\pi + \frac{2\pi}{3}$...	152415	10254,8	− 11,7	+ 866,6	+ 83,4			+750,5	−14,8		
5π.........	162669,8	10243,1	−860	+ 950				0			
$5\pi + \frac{\pi}{3}$....	172912,9	9383,1		+ 993				−860			
$5\pi + \frac{2\pi}{3}$...	182296										

Remarque. — Toutes les grandeurs indiquées au tableau représentent les grandeurs véritables multipliées par 10^4.

Tableau III. — *Intégration par la méthode de Störmer de l'équation* $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\sin t$, *où l'on a* $f(x) = \frac{1}{10}\sin\frac{x-10}{5}$.

t_n.	x_n.	Δx_{n-1}.	$\Delta_2 x_{n-2}$.	$h^2 \sin t_n$.	$f(x_n)$.	γ_n.	$\Delta\gamma_{n-1}$.	$\Delta^2\gamma_{n-2}$.	$\Delta^3\gamma_{n-3}$.	$\Delta^4\gamma_{n-4}$.	$\Delta^2+\Delta^3+\Delta^4$.	$\Delta^2+\Delta^3+\Delta^4 - \frac{1}{20}\Delta^4$.	$\frac{1}{12}\left\{\Delta^2+\Delta^3+\Delta^4 - \frac{1}{20}\Delta^4\right.$.
0	21460	10291	−846	0	−1000	0	−930	+983,2	− 159,6	−840,8	+ 983,2		82
$\frac{\pi}{3}$	31751	9445	−794,8	+0,950	− 979	−950	+ 53,2	+823,6	−1000,4	+347,2	+ 664		55
$\frac{2\pi}{3}$	41196	8650,2	+ 55	+0,950	− 923	−876,8	+870,8	−176,8	− 653,2	+104,3	−2018	−1976	−165
π	49846,2	8705,2	+535	0		0	+700	−830	+ 390	+381	−1136	−1153	− 96
$\pi + \frac{\pi}{3}$	58551,4	9240,2	+474	−0,950	− 737	700	−130	−440	+ 771	−681,5	+ 993	+ 941	+ 78,5
$\pi + \frac{2\pi}{3}$	67791,6	9714,2	+ 78,5	−0,950	− 600	570	−570	+331	+ 89,5	−634	+1483	+1464	+122
2π	77505,8	9792,7	−117	0		0	−239	+420,5	− 544,5	+311	− 171,5	− 137,5	− 11,5
$2\pi + \frac{\pi}{3}$	87298,5	9675,7	− 69	+0,950	− 251	−239	+181,5	−124	− 233,5		−1302,5	−1271	106
$2\pi + \frac{2\pi}{3}$	96974,2	9606,7	−106	+0,950	− 60,5	− 57,5	+ 57,5	−357,5			− 280	− 295,5	− 24,6
3π	106580,9	9500,7	−324,6	0		0	−300						
$3\pi + \frac{\pi}{3}$	116081,6	9176,1		−0,950	+ 316	−300							
$3\pi + \frac{2\pi}{3}$	125257,7												

Remarque. — Contrairement aux résultats obtenus par la nouvelle méthode : 1° Les différences retenues en dernier lieu ($\Delta^4\gamma$) sont très fortes et oscillent beaucoup; 2° γ_{n+1} est très différent de $\gamma_n + \Delta\gamma_{n-1} + \Delta^2\gamma_{n-2} + \Delta^3\gamma_{n-3} + \Delta^4\gamma_{n-4}$.
Ces faits dénotent l'inexactitude de la méthode et rendent la poursuite du calcul illusoire.

de sin t (*voir* Chap. II, I) sera plus précise que la méthode de Störmer, à valeur de pas égale, dans tous les cas usuels et cette nouvelle méthode sera particulièrement intéressante dans tous les problèmes où l'angle de transit (¹) des électrons est important, de l'ordre de 5π par exemple.

En effet, la méthode de Störmer, pour être applicable, nécessite l'adoption d'un pas de $\frac{\pi}{12}$, car pour des pas supérieurs l'extrapolation de sin t se fait d'une façon défectueuse. Or un pas de $\frac{\pi}{12}$ entraîne un trop grand nombre d'étapes.

Par contre, la nouvelle méthode permet d'utiliser des pas de l'ordre de $\frac{\pi}{3}$, car à l'ordinaire, l'angle de transit étant grand, $f(x)$ varie d'une façon suffisamment lente pour pouvoir être extrapolée dans de tels intervalles. L'économie de travail introduite par l'adoption de tels pas est très avantageuse, de l'ordre de 50 a 75 %.

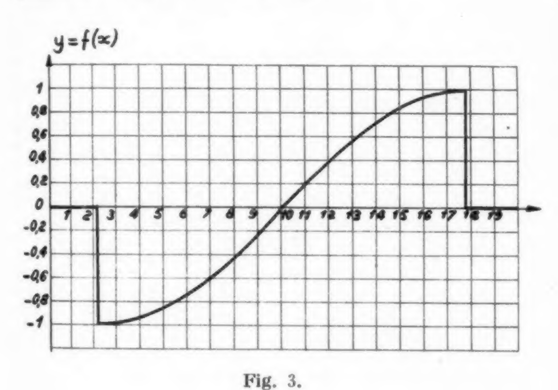


Fig. 3.

A titre d'exemple nous joignons à ce travail des tableaux correspondant à l'intégration numérique de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0{,}1 \sin \frac{x-10}{5} \sin t,$$

cas correspondant à un champ d'amplitude sinusoïdale, l'angle de transit étant de l'ordre de 5π (*fig.* 3).

En adoptant un pas égal à $\frac{\pi}{3}$, la nouvelle méthode (Tableau II), donne une approximation tout à fait satisfaisante, tandis que la méthode de Störmer (Tableau III), conduirait à des résultats absurdes.

(¹) Rappelons que l'angle de transit d'un électron dans un champ H. F. est le produit de la pulsation ω de ce champ, par le temps que met l'électron pour le traverser.

L'auteur tient à remercier M. Warnecke pour l'intérêt qu'il a porté à cette recherche mathématique et M. Bernier pour de nombreuses suggestions utiles et efficaces.

ANNEXE I.

Détermination des points initiaux.

I. **Cas général**.

Soit l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} = g(x, t)$. Pour effectuer l'intégration suivant le principe indiqué au Chapitre II, il faut connaître r points initiaux

$$P_{-3}[t_{-3}, g(x_{-3}, t_{-3})], \quad P_{-2}[t_{-2}, g(x_{-2}, t_{-2})], \quad \ldots, \quad P_{r-4},$$

à partir desquels l'extrapolation servant à la première étape pourra se faire.

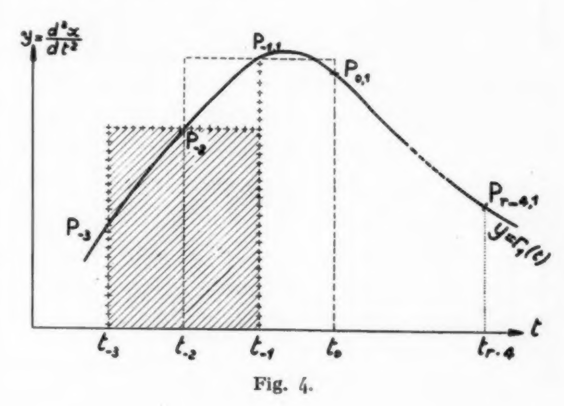


Fig. 4.

Or, pour que l'intégrale de l'équation différentielle soit déterminée, il faut que l'on fixe *a priori* soit $x(t_{-3})$, et la dérivée première correspondante $\frac{dx_{-3}}{dt}$, soit les deux valeurs $x(t_{-3})$, $x(t_{-2})$. Nous nous placerons dans ce dernier cas; par suite, supposant P_{-3} et P_{-2} donnés, nous indiquerons une méthode permettant de trouver les $r-2$ points suivants : on opérera par une série d'extrapolations et d'interpolations alternées.

1° *Extrapolation*. — On suppose $g(x, t) = g(x_{-2}, t_{-2})$ dans l'intervalle (t_{-3}, t_{-1}) d'où $x_{-1,1}$ par les formules (2) ou (3), et par suite $P_{-1,1}$, dont les coordonnées sont t_{-1}, $x_{-1,1}$.

De même on suppose $g(x, t) = g(x_{-1}, t_{-1})$ dans l'intervalle $[t_{-2}, t_0]$ d'où $x_{0,1}$ et par suite $P_{0,1}$.

TABLEAU IV. — *Valeur des coefficients a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}, d_{-2}, pour différents pas.*

t_{-2}.	a_{-2}.	b_{-2}.	c_{-2}.	d_{-2}.
Pas $h = \frac{\pi}{12}$.				
0............	0	+0,003	−0,005	+0,001
$\frac{\pi}{12}$...........	0,018	−0,033	+0,015	−0,001
$\frac{\pi}{6}$............	034	−0,065	0,033	−0,001
$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}$.......	0,048	−0,094	0,049	−0,003
$\frac{\pi}{3}$............	0,059	−0,116	0,061	−0,005
$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$.......	0,066	−0,131	0,070	−0,005
$\frac{\pi}{2}$............	0,068	−0,136	0,074	−0,006
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$.......	0,066	−0,133	0,072	−0,006
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.......	0,059	−0,120	0,066	−0,005
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}$...	0,048	−0,098	0,055	−0,005
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$.......	0,034	−0,071	0,041	−0,003
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$...	0,018	−0,039	0,024	−0,003
Pas $h = \frac{\pi}{6}$.				
0............	0	+0,024	−0,035	+0,009
$\frac{\pi}{6}$............	0,134	−0,248	+0,115	−0,002
$\frac{\pi}{3}$............	0,232	−0,452	0,233	−0,015
$\frac{\pi}{2}$............	0,268	−0,536	0,290	−0,022
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.......	0,232	−0,476	0,269	−0,023
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$.......	0,134	−0,288	0,175	−0,019
Pas $h = \frac{\pi}{3}$.				
0............	0	0,178	−0,267	0,070
$\frac{\pi}{3}$............	0,866	−1,643	+0,795	−0,028
$\frac{2\pi}{3}$...........	0,866	−1,821	1,062	−0,098

Remarque. — La valeur des coefficients pour $t = t_n + \pi$ est égale à la valeur correspondante pour t_n changée de signe.

On continue à appliquer le même procédé de proche en proche, jusqu'à la détermination de $P_{r-1,1}$.

2° *Interpolation.* — On fait passer une courbe intégrable $y = \Gamma_1(t)$ par les points P_{-3}, P_{-2}, $P_{-1,1}$, $P_{0,1}$, ..., $P_{r-1,1}$ et l'on détermine $P_{-1,2}$ par la formule (3), où l'on remplace $g(x, t)$ par $\Gamma_1(t)$.

Le point $P_{-1,2}$ une fois obtenu, on situe $P_{0,2}$, ..., $P_{r-1,2}$ par le procédé indiqué au 1°, puis on interpole à nouveau les points obtenus par une courbe $y = \Gamma_2(t)$. On répètera les opérations 1° et 2° jusqu'au moment où les $P_{j,i+1}$ diffèrent en position des $P_{j,i}$ de quantités que l'on peut considérer comme négligeables.

Ce mode d'opérer correspond à l'interprétation géométrique du procédé analytique abstrait employé par Störmer, à condition toutefois de prendre pour les $\Gamma(t)$ des polynomes de degré $r-1$ en t, mais il est évident que toute autre combinaison d'extrapolations et d'interpolations successives conduirait au même résultat.

B. **Cas particulier**.

Considérons l'équation de la forme indiquée au Chapitre II

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \sin t.$$

Pour effectuer l'intégration approchée exposée dans ce chapitre on doit connaître au préalable

4 points.

$$P_{-3}(t_{-3},\, g_{-3});\quad P_{-2}(t_{-2},\, g_{-2}),$$
$$P_{-1}(t_{-1},\, g_{-1}),\quad P_0(t_0,\, g_0)$$

dont les deux premiers P_{-3} et P_{-2} sont donnés par les conditions initiales. Pour connaître les deux autres, il suffit de procéder comme il vient d'être indiqué. Calculons les coefficients numériques qu'il faudra employer à cet effet.

1° *Dans l'extrapolation.* — Désignons par $\Delta^2 x^e_{-3}$ et $\Delta^2 x^e_{-2}$ les différences obtenues par extrapolation et posons

$$\tau = \frac{t - t_{-2}}{h},$$

$$\Delta^2 x^e_{-3} = h^2 f_{-2}\left[\int_0^1 (1-\tau)\sin(t_{-2} + h\tau)\,d\tau + \int_{-1}^0 (1+\tau)\sin(t_{-2} + h\tau)\,d\tau\right]$$

d'où en effectuant

$$\Delta^2 x^e_{-3} = A_{-2} f_{-2},$$

de même

$$\Delta^2 x^e_{-2} = A_{-1} f_{-1},$$

où A_{-2} et A_{-1} ont la même signification qu'au Chapitre II : leur valeur figurant au Tableau I.

Ce résultat était du reste prévisible *a priori*.

2° *Dans l'interpolation.* — Désignons par $\Delta^2 x^i_{-3}$ la valeur de la différence obtenue par interpolation.

Le polynome d'interpolation a pour forme

$$\pi(\tau) = f_0 + \tau\,\Delta f_{-1} + \frac{\tau(\tau+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{6}\Delta^3 f_{-3}.$$

Si l'on pose

$$\tau^1 = \frac{t - t_{-2}}{h} = \tau + 2.$$

De (3) on déduit alors la formule indiquée en note (¹). D'où en effectuant

$$\Delta^2 x^i_{-3} = a_{-2} f_0 + b_{-2}\,\Delta f_{-1} + c_{-2}\,\Delta^2 f_{-2} + d_{-2}\,\Delta^3 f_{-3},$$

où l'on a posé

$$a_{-2} = A_{-2},$$
$$b_{-2} = -2A_{-2} + B_{-2},$$
$$c_{-2} = A_{-2} + 2B_{-2} + C_{-2},$$
$$d_{-2} = B_{-2} - 2C_{-2} + D_{-2},$$

A_{-2}, B_{-2}, C_{-2}, D_{-2} ayant la signification indiquée dans la formule (10) du Chapitre II.

Les valeurs numériques des coefficients a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}, d_{-2} sont données au Tableau IV en fonction de t_{-2} et du pas adopté.

BIBLIOGRAPHIE.

1. A. Cauchy, *Œuvres* (1) 5, 1840, p. 409.
2. C. Störmer, *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre, avec application aux aurores boréales* (*Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, Genève, juillet-octobre 1907).
3. C. Störmer, *Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire*, I, II, III (*Videnskabsselskabets Skrifter, Math. Naturv. kl.*, 1913, nº 4, 10 et 14, Christiania).
4. C. Störmer, *Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires* (*Congrès international des mathématiciens*, Strasbourg, 22-30 septembre 1920, p. 244).
5. A. N. Kryloff, *Sur l'intégration numérique des équations différentielles* [Extraits du *Mémorial de l'Artillerie française*, 6, 1927 (2 fasc.), p. 353-423].
6. J. Hadamard, *Cours d'analyse professé à l'École Polytechnique*, t. II, p. 303 à 313, Hermann 1930.
7. A. Henry, *Le calcul des différences finies et ses applications*, Hermann 1932.
8. R. Warnecke, *Sur quelques conceptions nouvelles dans les domaines de la physique et de la technique des tubes émetteurs pour les fréquences très élevées* (*Annales de la Radiodiffusion*, 1, janvier 1944, p. 21).
9. R. Warnecke, *Contribution à la physique et à la technique des tubes électroniques dits à modulation de vitesse* (*Annales de Radioélectricité*, 1, juillet 1945, p. 6).

(¹) $$\Delta^2 x^i_{-3} = h^2\int_0^1 [1-\tau^1]\left[f_0 + (\tau^1-2)\,\Delta f_{-1} + \frac{(\tau^1-2)(\tau^1-1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{(\tau^1-2)(\tau^1-1)\tau^1}{6}\Delta^3 f_{-3}\right]\sin(t_{-2} + h\tau^1)\,d\tau^1$$
$$+ h^2\int_{-1}^0 [1+\tau^1]\left[f_0 + (\tau^1-2)\,\Delta f_{-1} + \frac{(\tau^1-2)(\tau^1-1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{(\tau^1-2)(\tau^1-1)\tau^1}{6}\Delta^3 f_{-3}\right]\sin(t_{-2} + h\tau^1)\,d\tau^1,$$

L'ÉVOLUTION DE LA TECHNIQUE DES CÉRAMIQUES DANS LES LABORATOIRES DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL (C. S. F.). PROCÉDÉS C. S. F. POUR LA PRÉPARATION DES CÉRAMIQUES DE HAUTE PRÉCISION.

PAR FRÉDÉRIC VIOLET,

Chef du Laboratoire de Recherches Physico-Chimiques de la Cie générale de Télégraphie sans fil.

ET RENÉ LECUIR,

Ingénieur au Laboratoire de Recherches Physico-Chimiques de la Cie générale de Télégraphie sans fil.

SOMMAIRE. — *Définition des céramiques. Histoire succincte et esquisse des méthodes de la céramique classique. Problèmes posés par l'emploi des céramiques dans l'industrie.*

Analyse des causes dont dépendent les qualités exigées de ces céramiques. Elles figurent presque toutes dans l'étude générale du retrait qui se divise en étude de l'agglomération et du traitement thermique, celui-ci commandant à son tour les variations d'état cristallin et étant lié à la composition. Seul, le façonnage en cru doit être traité à part.

Pas de différences assez radicales avec la céramique classique pour justifier une séparation des études au départ, d'où les méthodes de recherches adoptées par nos Laboratoires : on partira de l'analyse des procédés classiques pour décider si l'on peut les adapter à la céramique industrielle ou si l'on doit les remplacer; les nouvelles méthodes seront ainsi progressivement dégagées puis développées dans leur direction propre.

Le plan de l'étude sera celui défini ci-dessus des causes dont dépendent les qualités des céramiques industrielles :

Les techniques classiques de façonnage en cru qui doivent être traitées à part fourniront l'étude d'introduction; la conclusion en sera que ces techniques ne peuvent directement s'étendre à la céramique industrielle; on ne peut toutefois en proposer de nouvelles avant d'avoir approfondi les questions d'agglomération qui ressortissent aux chapitres suivants. Il faudra donc y revenir plus tard.

Vient alors l'étude générale du retrait qu'on aborde par le mécanisme de l'agglomération qui sera lui-même éclairé par l'examen des trois propriétés fondamentales de l'agglomérant : plasticité, cohésion, évacuation.

L'étude attentive des diverses théories de la plasticité nous a amenés à penser qu'un solide facilement fusible devait se comporter comme un excellent agglomérant à cet égard, ce que l'expérience a pleinement confirmé.

Nous proposons ensuite une théorie de la cohésion dont le facteur dominant est constitué selon nous par les actions capillaires; le comportement des divers agglomérants s'explique parfaitement ainsi et là encore un solide facilement fusible apparaît comme l'agglomérant de choix (facilité de mélange et déplacement des gaz adsorbés).

Nous étudions enfin le processus d'évacuation des agglomérants classiques les plus divers et l'on trouve une nouvelle fois grand avantage à les remplacer par un solide facilement fusible (suppression du séchage et risques d'accidents diminués).

L'analyse des procédés classiques d'agglomération nous a donc conduits pas à pas vers une méthode nouvelle qui a marqué un grand progrès quant aux trois propriétés fondamentales des agglomérants et a déjà fait l'objet d'applications industrielles importantes.

La suite de cet article paraîtra dans un prochain numéro des Annales, elle comprendra notamment ce qui reste à traiter du problème général du retrait, à savoir la cuisson, les variations d'état cristallin et les questions de composition. On reviendra ensuite sur le façonnage en cru puis on terminera par la vue d'ensemble d'une méthode céramique originale homogène, utilisant les procédés nouveaux mis au point au cours des recherches décrites et appuyée sur les moyens de contrôle scientifiques les plus rigoureux.

Introduction.

On peut définir une céramique comme un corps essentiellement constitué d'oxydes minéraux généralement réfractaires.

Ces oxydes peuvent s'y trouver soit purs soit diversement mélangés ou combinés, mais ils doivent rester cristallins, certaines pâtes dites « vitrifiées » faisant exception par la présence *dans leur masse* d'une très faible proportion de phase vitreuse (indépendamment de la couche vitreuse *superficielle* dite « émail » ou « couverte » utilisée parfois comme revêtement).

La première idée qui vient à l'esprit pour réaliser une pâte céramique est donc de partir des oxydes constituants réduits en poudre, de les mélanger, puis de les agglomérer sous la forme que l'on désire, et enfin de les fixer définitivement par une cuisson adéquate qui développera en même temps les espèces cristallines convenables.

L'art du céramiste qui existe depuis les âges les plus reculés a été porté à un très haut degré de perfection grâce à des méthodes bien différentes que nous étudierons, mais la mise en œuvre de propriétés nouvelles, exigées des céramiques par l'industrie radio en particulier, n'a pu être réalisée qu'en abandonnant ces méthodes classiques en faveur d'une technique moderne orientée par les conceptions simplistes esquissées ci-dessus.

Céramique classique et céramique industrielle.

La céramique classique a toujours recherché la solidité et l'étanchéité au moins relative des pièces finies, puis la beauté de la pâte et son aptitude à la décoration.

Mais il fallait avant tout que la matière pût être façonnée avant cuisson, ce qui n'impliquait à l'origine rien de plus que la possibilité de pétrir des objets grossiers avec les doigts; l'éveil du sens esthétique incita très vite l'homme à la recherche de formes plus harmonieuses et le secours de ses mains lui devint bientôt insuffisant.

Un problème d'outillage technique se posait donc, ressortissant au domaine d'une nouvelle activité humaine, l'esprit d'industrie; dès l'époque préhistorique il était résolu par l'invention du tour de potier et des premières techniques de moulage. Le matériel artisanal ainsi créé ne devait guère varier dans la suite et l'esprit d'industrie cessa de se manifester autrement que par des perfectionnements, ne remettant rien d'essentiel en question.

Le sens esthétique au contraire continua à vivre d'une vie intense, connaissant au cours des âges les plus magnifiques essors et les pires chutes, mais à la diversité des productions s'opposait toujours la fixité des méthodes et les plus délicats chefs-d'œuvres des grandes époques comme les plus déplorables productions de la décadence ont été matériellement réalisés par des moyens dont les principes remontent à l'aube de la civilisation.

Suivons maintenant le travail du céramiste; il a tout d'abord à résoudre un problème d'agglomération car il est bien évident que la pâte crue ne pourra être mise en forme que si elle contient un corps lui donnant cohésion et plasticité.

Il faut ensuite que les pièces façonnées soient durcies et présentent alors étanchéité et beauté de pâte satisfaisantes; c'est un problème de cuisson et de composition qui s'offre ici à la sagacité de l'homme de l'art.

Ces problèmes, d'ailleurs interdépendants, ont été résolus de la façon suivante :

— Pour l'agglomération, on a fait appel de tout temps aux propriétés de l'argile. Ce silicate d'alumine, mélangé en présence d'eau aux matières minérales les plus diverses, permet leur mise en forme par tournage ou moulage; on en trouvera donc toujours une certaine proportion dans les céramiques classiques;

— Le durcissement s'obtient par la cuisson dont on considérera le séchage comme un premier stade pendant lequel s'évacue une partie importante de l'eau contenue dans la pâte, ce qui entraîne un premier retrait; ce n'est toutefois qu'au four et très au-dessus du point d'ébullition de l'eau que les dernières traces énergiquement retenues par l'argile disparaissent, la pâte est alors dure mais non encore étanche; on peut à ce moment, soit pousser la température jusqu'à « vitrification » c'est-à-dire jusqu'à ce qu'un des constituants de la pâte commençant à fondre enrobe les grains des autres, soit arrêter la cuisson et enduire la pièce d'une « couverte » étanche moyennant une nouvelle cuisson (émail de petit ou de grand feu suivant la température). Dans les deux cas, on obtient des pièces étanches et aptes à être décorées si besoin est. Précisons en passant que dans certains cas on interpose entre pâte et émail une couverte particulière, étanche et opaque, adhérant bien aux deux, qui a reçu le nom d' « engobe »; dans d'autres cas l'émail peut être simplement déposé sur la pâte crue et cuit avec elle;

— La beauté de la pâte dépend surtout de sa composition en tant que nature des constituants, état de division de chacun d'eux et degré d'intimité du mélange;

— Enfin, la composition influe sur la cuisson, certains composants agissent comme fondants et hâtent la vitrification, un même corps fond plus vite très divisé que grossièrement broyé, la proportion d'agglomérant (argile) entre dans la composition et joue un rôle analogue.

La céramique industrielle se propose, elle, de rechercher dans tous les cas la précision tant au point de vue géométrique, chaque pièce devant être produite en série avec des tolérances de cotes extrêmement serrées, qu'au point de vue physique; chaque type de pâte devant présenter des propriétés élevées et constantes (importance particulière des propriétés électriques). Dans certains cas seulement on recherchera en outre étanchéité et solidité; les pièces destinées à supporter des montages sous vide n'ont en effet pas besoin d'être étanches et une certaine friabilité peut être tolérée ou même recherchée en vue de retouches éventuelles à l'outil.

Il est facile de voir que pour obtenir la précision géométrique il faut assurer à la pâte un retrait constant, uniforme et autant que possible réglable; à côté de ce facteur dominant qui pose un problème général très complexe il ne faut pas oublier la nécessité de mettre au point une technique de façonnage en cru dont la précision soit en rapport avec celle exigée des pièces finies.

La précision physique dépend de son côté de la composition au triple point de vue de la pureté, de l'état de division et du mélange des constituants, et de l'état cristallin au double point de vue de la nature et de la grosseur des cristaux.

Étudions en premier lieu le retrait. Il dépend d'abord de l'*agglomération*; l'agglomérant devra exister en proportion définie et constante, être également réparti dans la masse et mouiller convenablement les autres constituants. Il dépend ensuite du *traitement thermique* qui devra assurer d'une part l'uniformité de chauffe, d'autre part une vitesse de chauffe, une température maxima et une vitesse de refroidissement définies; les *changements d'état cristallin* en cours de traitement (variation de taille des cristaux, modifications allotropiques, réactions chimiques, vitrification) influent également sur le retrait ainsi que la *composition* qui intervient non seulement par sa nature (choix des constituants de base et degré de pureté) mais encore par son état de division et son uniformité (mélange homogène de grains de grosseur donnée).

Cette analyse rapide des causes du retrait nous apprend donc que l'étude de ce facteur dominant de la précision géométrique englobe celle des facteurs de la précision physique. Elle nous apprend encore que les causes dont dépendent en dernier ressort les qualités des céramiques industrielles ne diffèrent pas radicalement de leurs homologues en céramique classique.

D'où la double conclusion qu'un travail général doit commencer par l'étude complète du retrait et qu'on ne peut raisonnablement tourner le dos à la céramique classique avant d'en avoir soigneusement approfondi les méthodes au risque de se priver de la source d'information, précieuse en tout état de cause, que constitue l'expérience plusieurs fois millénaire de cet art.

Nous nous proposons donc de partir de l'analyse des procédés classiques afin de décider si l'on peut les adapter à la céramique industrielle ou s'il faut les remplacer. Les nouvelles méthodes se dégageront ainsi progressivement et se développeront dans leur direction propre sous nos yeux.

On commencera par l'étude des techniques classiques de façonnage en cru qui servira d'introduction à l'étude générale du retrait.

Façonnage en cru des pâtes argileuses.

Les compositions à base d'argile peuvent être utilisées soit en pâtes liquides ou molles caractérisées par une très grande sensibilité aux variations de pression même faibles en cours de travail, mais d'une parfaite homogénéité, soit en pâtes dites sèches moins délicates mais souvent peu homogènes en raison de la difficulté de répartir également dans la masse une très faible humidité.

Les trois procédés classiques de façonnage sont le tournage, utilisant une pâte molle, le coulage (ou moulage en moules absorbants) qui utilise une pâte liquide et le moulage proprement dit, en moules non absorbants et sous pression, qui utilise des pâtes molles ou sèches.

Les propriétés structurales de l'argile (structure lamellaire) dominent le comportement des pâtes dans les trois cas.

Si l'on considère en effet une série de lamelles orientées parallèlement, leur retrait au séchage résulte principalement du départ de l'eau d'interposition, et il s'effectuera suivant une direction perpendiculaire au plan de ces lamelles. L'orientation des particules d'un composé de structure lamellaire doit donc déterminer des variations de retrait dans la masse de l'échantillon soit qu'il existe des orientations privilégiées, soit que ces orientations ne se trouvent pas identiques dans les différentes pièces. C'est de cette structure lamellaire de l'argile que résultent les variations du retrai

des pâtes argileuses sous l'influence de très faibles inégalités de pression qui suffisent à déterminer une orientation distincte des lamelles. Par exemple, pendant le tournage, les mains de l'ouvrier, opposées l'une à l'autre, compriment la pâte placée sur un plateau tournant, de manière à lui faire prendre la forme désirée. Cette pression, exercée suivant un mouvement hélicoïdal, détermine l'orientation des lamelles argileuses suivant des lignes privilégiées qui donnent lieu au défaut connu sous le nom de « vissage ». Ce sont des sillons plus ou moins sensibles qui correspondent à la pression exercée par la main de l'ouvrier et partant de la base de la pièce en s'élevant en hélice comme le pas d'une vis. Si ce défaut est trop prononcé, la pièce se déforme et les inégalités de retrait sont parfois assez grandes pour qu'il se forme des fentes dans les cavités qui suivent la direction des lignes de vissage.

Les pâtes les plus liquides, dites barbotines, sont utilisées dans la technique du coulage. La pâte doit alors être assez fluide pour être versée dans un moule absorbant. Celui-ci est généralement en plâtre, et la pâte, en raison du retrait pris par dessiccation, peut ultérieurement être détachée du moule.

La stabilité des suspensions argileuses permet d'obtenir une barbotine de densité définie et par suite de partir toujours d'une composition homogène et constante. Mais il n'est possible de conserver cette égale densité de la pâte à la sortie du moule que sur des pièces creuses de faible épaisseur (en supposant en outre que les divers moules présentent toujours le même pouvoir absorbant). Quand les pièces présentent une épaisseur notable, l'action des parois produit une déshydratation rapide des couches externes; leur formation même oppose une résistance à la déshydratation des couches plus profondes. Par suite, la partie centrale de la pièce prendra, après cuisson, un retrait plus grand que les couches externes. Le coulage des pièces d'une certaine épaisseur déterminera donc généralement la formation d'un défaut au centre de la pièce.

Ici encore le départ de l'eau d'interposition provoque une orientation des lamelles; en particulier la suture des moules laisse une ligne saillante; même si l'on prend soin de faire disparaître ce défaut sur la pièce crue, il apparaît de nouveau après cuisson.

Si l'on désire obtenir un retrait constant, il est utile d'exercer une pression uniforme sur la masse traitée, ce qu'il est relativement facile d'obtenir en utilisant un moule muni d'un piston. Dans ces conditions, en effet, la pâte se répartira toujours avec la même orientation des éléments lamellaires si dans les expériences successives la même pression maxima est obtenue dans le même temps.

On opère alors dans des moules non absorbants et le comportement de la masse traitée est le suivant :

Lorsque la pression s'exerce directement sur les grains d'une poudre, ceux-ci frottent les uns sur les autres, et il se produit rapidement un grippage, c'est-à-dire qu'on atteint une pression limite après laquelle ne se produit plus de tassement de la poudre.

Au contraire, lorsque les grains sont enrobés dans un liquide qui permet leur déplacement, ils constituent ce qu'en terme de « graissage » on appelle un lubrifiant *plastique*. Le phénomène est ainsi décrit par M. Woog :

« Lorsqu'on comprime entre deux surfaces un lubrifiant plastique, après une première phase où la compression doit dépasser une certaine valeur, le lubrifiant plastique se cisaille et les surfaces se rapprochent en provoquant l'expulsion d'une partie de la masse interposée; mais au fur et à mesure que la couche malléable diminue, la résistance au cisaillement augmente et l'expulsion se ralentit, puis l'écoulement cesse quand la limite de plasticité est atteinte. Au contraire, un lubrifiant *visqueux* est presque totalement chassé si on le serre pendant un temps suffisant entre deux surfaces. »

En fait, un même corps pourra se comporter comme lubrifiant plastique ou visqueux au sens de la définition de Woog. Une certaine quantité minima d'eau, présente dans une pâte céramique, transformera la masse même de celle-ci en ce que Woog appelle un « lubrifiant visqueux », le moule et son piston jouant le rôle des surfaces à lubrifier. Pour une quantité d'eau moindre, et à pression égale, la masse ne sera plus qu'un lubrifiant plastique. Réciproquement, pour une même quantité d'eau, la masse sera lubrifiant visqueux ou plastique suivant que la pression appliquée sera plus ou moins forte. La pâte lubrifiant visqueux correspond à la technique du façonnage en moules à évents sous faible pression, la pâte lubrifiant plastique à celle du façonnage en moules étanches sous fortes pressions.

Dans les deux cas, il est toujours nécessaire de procéder d'abord à la pulvérisation de l'argile préalablement séchée, et on l'additionne d'une quantité variable d'eau suivant le mode de façonnage utilisé.

Mais la principale difficulté provient du mélange de la poudre avec des quantités définies et relativement faibles de liquide. Un malaxage énergique permet bien d'arriver à une répartition à peu près satisfaisante, mais le principal obstacle provient

du séchage préalable de l'argile; celle-ci, en effet, de par sa nature même, retient énergiquement l'eau adsorbée. Le séchage s'effectue par la surface et dépend du rapport de celle-ci au volume total traité. Même en emmagasinant l'argile dans des séchoirs spéciaux, on constate que sa perte au feu varie notablement dans la masse dès que celle-ci présente une certaine épaisseur. En définitive, il est impossible d'arrêter l'opération à un degré de dessiccation bien défini et toujours le même. Par suite, il est donc impossible d'éviter les variations de retrait en raison de la teneur en eau elle-même variable avec la préparation de la pâte. Le problème est d'autant plus difficile à résoudre que les quantités d'argile mises en jeu sont plus grandes et qu'il s'écoule un temps plus long entre la préparation de la pâte et son emploi. Les variations de retrait sont alors de l'ordre d'au moins $\pm$ 2 % pour les pâtes traitées par voie sèche et peuvent atteindre $\pm$ 5 % pour celles traitées par voie humide.

Nous pouvons donc nous résumer en disant qu'en raison de leur structure lamellaire dans certains cas particuliers, et plus généralement en raison de leurs propriétés physiques caractéristiques, les pâtes argileuses se prêtent mal à la réalisation d'un retrait constant dans les fabrications céramiques.

Nous allons maintenant aborder l'étude générale du retrait en commençant par l'agglomération que nous avons vu être son premier facteur.

ÉTUDE GÉNÉRALE DU RETRAIT.

I. — Mécanisme de l'agglomération.

Nous nous proposons ici de traiter la question d'un point de vue tout à fait général, c'est-à-dire de ne rien supposer *a priori* sur la nature de l'agglomérant. Toutefois les techniques à l'argile étant de loin les plus répandues et les seules classiquement utilisées on raisonnera le plus souvent sur des exemples fournis par elles.

Avant d'entrer dans le vif du sujet il faut encore définir le sens exact que nous attribuons au mot « agglomérant ». Nous désignerons ainsi un corps susceptible de lier entre eux les grains de la composition crue et qui devra jouer trois rôles principaux qu'on étudiera séparément : donner à la masse la *plasticité* nécessaire à sa mise en forme, lui assurer une *cohésion* suffisante et enfin *s'évacuer* sans dommage pour les pièces à la cuisson.

Pour l'argile en particulier qui est, rappelons-le, un silicate d'alumine hydraté, c'est le couple silicate d'alumine-eau qui fonctionne comme agglomérant; c'est l'eau qui s'évacuera à la cuisson laissant un silicate d'alumine anhydre qui n'est plus une argile (ou des produits de décomposition). En dernier ressort c'est donc l'eau qui apparaît alors comme le véritable agglomérant mais si l'on considère les choses sous cet angle, il faut toujours avoir présent à l'esprit que l'eau ne joue ce rôle qu'en présence du silicate d'alumine qu'elle hydrate.

Étude de la plasticité.

Nous examinerons d'abord la classification de Salmang qui divise en trois groupes la profusion des théories sur la plasticité, à savoir les théories morphologiques, chimiques et physiques, puis nous étudierons une conception de M. Duclaux qui nous a suggéré des possibilités nouvelles que nous exposerons en conclusion.

1° *Les théories morphologiques* expliquent la plasticité par la finesse des grains et la forme lamellaire des particules les plus fines. H. Rosler, Leppla, Atterberg, Le Chatelier.

2° *Les théories chimiques* attribuent la plasticité à deux groupes de causes :

a. A des colloïdes accessoires minéraux ou organiques, l'argile en soi n'étant pas plastique, Schlœsing, Ehrenberg, Rholand, Spurrier; les expériences de Pfefferkorn infirment cette conception, alors que celles de Bottcher la confirment dans une certaine mesure. Il y a lieu vraisemblablement de ne leur attribuer qu'une importance secondaire.

b. Elles attribuent aussi la plasticité au gonflement des particules d'argile avec formation d'une couche gélatineuse à leur surface. Zechokke, Cushman, Ashley, Endell. Les expériences de Podszus et Ruff conduisent, en conformité avec cette idée, à des pâtes qui peuvent être façonnées par coulage, bien qu'elles soient exemptes d'argile.

Salmang et Becker attribuent la plasticité à la présence de liquides hydrolysables, réagissant sur l'argile parce que la même plasticité ne peut être communiquée au talc et au graphite malgré leur structure lamellaire. Vageler considère d'ailleurs l'argile comme un acide ionisable susceptible de former des sels colloïdaux.

3° *Les théories physiques* admettent que la tension superficielle de l'eau suffit à presser les particules d'argile qui y sont délayées; Purdy, Le Chatelier, de Terzaghi. Purdy a cherché à confirmer sa théorie en se basant sur le fait que la dissolution des sels

augmente la tension superficielle, ce que conteste vivement Salmang. De Terzaghi a calculé que la tension superficielle et la viscosité de l'eau étaient plusieurs fois accrues par l'adsorption de l'eau sur l'argile.

4° *Conception de M. Duclaux.* — Cet auteur considère la plasticité comme résultant d'un état proche de l'état liquide. Selon lui, « pour qu'un solide devienne plastique, il suffit que son état se rapproche de l'état liquide, c'est-à-dire que les molécules soient en désordre, en circulation continue et orientées au hasard. Si l'on arrive à introduire le désordre dans un solide, celui-ci acquerra au moins quelques propriétés des liquides. C'est ce qu'on réalise par l'action de la chaleur qui amplifie les mouvements moléculaires jusqu'à destruction de la structure ».

5° *Conclusion.* — Après examen de ces divers points de vue, nous avons été amenés à penser que comme un solide peut généralement être amené par fusion à l'état liquide, il serait possible d'utiliser un *produit facilement fusible* comme liant entre des grains minéraux, en effectuant par exemple la pression à une température supérieure au point de fusion du liant.

On peut ainsi communiquer effectivement à la masse traitée un caractère plastique ou même visqueux *réglable* par la température et la proportion d'agglomérant qu'on peut *doser* aussi exactement que l'on veut.

Étude de la cohésion.

Il s'agit là d'un problème d'actions capillaires; pour qu'il y ait cohésion parfaite il faut en effet que *chaque particule élémentaire de la pâte se trouve dans le rayon d'action moléculaire de ses voisines.* Cohésion ne suppose d'ailleurs pas toujours rigidité, par exemple si l'un des constituants est fluide la masse pourra être déformable sans présenter de défaut de cohésion.

La condition ci-dessus n'est évidemment plus remplie dès qu'il existe des gaz adsorbés, dans ce cas en effet leur élasticité s'oppose à leur expulsion même si l'on met en jeu de fortes pressions et la masse ne peut acquérir de cohésion qu'après traitement par un agglomérant capable de chasser les gaz adsorbés.

Le cas particulier de l'*argile* semble faire exception, l'eau et l'air coexistant d'après Le Chatelier : il fait observer qu'une pâte argileuse plastique renferme toujours une certaine quantité d'air, ce que démontre la comparaison entre sa densité réelle et sa densité apparente. Les vides intérieurs donnent naissance à une infinité de petits ménisques dans des espaces ne dépassant pas le millième de millimètre. Dans ces conditions, les tensions capillaires provoquent des efforts qui rendent compte de la ténacité des pâtes crues, augmentée encore par le frottement des grains solides les uns contre les autres (W. Purkal et A. E. R. Westman estiment ces forces à 70 kg/cm²). La déformation sans rupture est alors analogue à celle d'un jeu de cartes que l'on fait glisser sur une table; les lamelles peuvent se déplacer l'une par rapport à l'autre sans cesser de rester en contact.

Cette explication par l'imbrication des formes lamellaires jointe aux forces capillaires rend parfaitement compte du comportement des pièces façonnées sur le tour. L'énergie des actions capillaires résulte de la présence des ménisques à la séparation des phases liquide-air. Il est toutefois utile d'ajouter que la présence de gaz occlus dans la pâte argileuse, présentée par Le Chatelier comme une condition nécessaire, a seulement pour effet d'accroître les forces capillaires et que leur action à la surface des grains est encore suffisante lorsque les gaz occlus sont absents, pour assurer la cohésion des objets préparés par les autres modes de façonnage. On s'explique la recette empirique bien connue des céramistes de battre les pâtes destinées au tournage. Ceci permet aussi d'expliquer l'impossibilité de procéder au séchage complet de l'argile, par suite de la localisation des ménisques à la surface de séparation de l'objet avec l'air ambiant. C'est par cette surface en effet que doit s'effectuer le séchage. Or, il est nécessaire que la vaporisation du liquide des ménisques se produise avec la même vitesse que la diffusion du liquide de l'intérieur de la masse vers la surface. Si la vaporisation en surface s'effectue plus rapidement que la diffusion du liquide interne vers cette surface, la masse d'argile tendra à s'envelopper d'une croûte imperméable empêchant le départ de l'humidité interne, par suite de la cohésion croissante avec le rayon de courbure des ménisques liquides.

Mais l'exception constituée par les pâtes argileuses n'est vraisemblablement qu'une apparence car, dans ce cas particulier, l'air qui se trouve retenu dans la masse ne se comporte pas comme un gaz adsorbé.

En effet, si l'on considère tout autre corps du même type physique que l'argile (structure lamellaire) le talc par exemple pour fixer les idées, l'air redevient un obstacle à la cohésion et l'eau qui est impropre à le chasser ne convient plus comme agglomérant, alors que l'émulsion eau-huile convient.

Pour interpréter le phénomène, il faut d'abord

observer que pour chasser les gaz adsorbés on doit choisir un agglomérant susceptible de mouiller les particules élémentaires de la pâte, ici les lamelles de talc; une expérience de M. Devaux donne ensuite la clé du problème : il a montré « qu'une particule de talc placée à la surface de séparation de deux liquides non miscibles comme l'eau et la benzine, est fortement attirée par l'eau d'un côté, par la benzine de l'autre sans qu'on puisse intervertir ses deux faces, alors qu'à l'origine la totalité de la surface avait une mouillabilité composite. C'est, brusquement, au contact de l'eau que des portions sont devenues hydrophiles et que d'autres au contact de la benzine sont devenues plus hydrophobes ». L'huile joue le même rôle que la benzine et assure le mouillage des surfaces hydrophobes.

La cohésion en présence d'un *produit colloïdal* (nous entendons par là une substance solide pénétrée par un liquide qui la disperse sans donner de solution vraie) s'explique également : d'une part en effet, le liquide est énergiquement adsorbé par son colloïde, donc pas de gaz adsorbés à sa surface, d'autre part la tension superficielle des solides au contact de la suspension colloïdale est notablement abaissée, ce qui favorise le mouillage de la poudre de base. Le colloïde joue alors en somme pour le reste de la pâte le rôle que jouait l'eau pour l'argile, d'où nécessité égale et difficultés du même ordre de le disperser régulièrement en quantité modérée.

Enfin, la cohésion en présence d'un *solide facilement fusible* jouant le rôle d'agglomérant, déjà trouvé avantageux pour la plasticité, présente les avantages considérables suivants : le *mélange* peut se faire à froid *entre solides* d'où facilité de disperser l'agglomérant avec une absolue régularité *en quelque proportion que ce soit*; le déplacement des gaz adsorbés par la poudre de base a lieu par *fusion* de l'agglomérant, choisi comme ayant une faible tension superficielle pour favoriser le mouillage, et beaucoup de corps organiques à bas point de fusion présentent cette propriété; enfin l'agglomération proprement dite se fait *après mouillage* soit à chaud soit après refroidissement suivant les cas.

Étude de l'évacuation.

Il s'agit maintenant de transformer une masse dont les éléments sont de petits grains (ou lamelles) reliés entre eux par un agglomérant, cohérente certes mais encore fragile et déformable, en un corps solide débarrassé d'agglomérant, compact et indéformable.

Pour que l'évacuation de l'agglomérant puisse se faire sans entraîner de solution de continuité dans la masse qu'il imprègne, il faut que sa vitesse d'évaporation en surface ne soit jamais plus grande que celle de diffusion des parties profondes vers l'extérieur. Faute de cela une sorte de croûte superficielle imperméable se forme et l'évacuation ne peut plus se poursuivre que par voie d'éclatement. Mais il faut avant tout que la tendance à la diffusion existe, c'est-à-dire qu'agglomérant et aggloméré soient dans leurs rayons d'attraction moléculaire respectifs; alors en effet la diminution par évaporation de la masse de l'agglomérant entraîne le rapprochement des grains de la poudre de base, ce qui augmente la diffusion de l'agglomérant qui reste (à la façon d'une éponge qu'on presse) et ainsi de suite.

Si au contraire aggloméré et agglomérant sont hors de leur zone d'action mutuelle l'agglomérant disparaîtra sur place sans provoquer le rapprochement des grains de la poudre de base et le produit final aura perdu toute cohésion.

Il est à remarquer qu'un échauffement brutal pourrait donner lieu à des inconvénients du même ordre même dans le cas d'un bon mouillage. Toutefois quand il y a adsorption énergique de l'agglomérant par la poudre de base, sa température de vaporisation est très considérablement remontée, ce qui favorise beaucoup l'évacuation progressive et réduit le risque d'éclatement par vaporisation brutale.

Dans le cas des *pâtes argileuses* où c'est l'eau qui joue le rôle d'agglomérant, l'évacuation se fait bien si l'on monte la température assez progressivement pour éviter la formation d'une croûte superficielle imperméable; l'air occlus qui, on l'a vu, n'est pas adsorbé, s'évacue avec l'eau. Le cas des pâtes non argileuses mais agglomérées par un liquide qui les mouille se ramène à celui-ci.

Dans le cas des *pâtes agglomérées par un produit colloïdal* les mêmes précautions sont nécessaires mais l'adsorption par le colloïde du liquide dispersant est si énergique que celui-ci n'est évacué qu'à des températures dépassant de beaucoup son point d'ébullition. Van Bemmelen a montré par exemple que les gels de silice sont traversés de pores extraordinairement fins après dessiccation. L'eau est retenue dans les gels minéraux de ce type avec une telle énergie qu'il est nécessaire de les soumettre à des températures extrêmement élevées pour chasser les dernières traces d'eau adsorbée. Ces canalicules ne peuvent être dus à des gaz adsorbés (l'adsorption très forte de l'eau par le colloïde, les aurait déplacés) on peut les attribuer à des traces résiduelles de gaz dissous qui ne s'évacuent

pas avec l'eau et sont adsorbés au moment de son départ.

Enfin dans le cas d'un *solide facilement fusible* adsorbé par la poudre de base, on a élimination progressive de l'agglomérant par diffusion vers l'extérieur avec rapprochement des grains enrobés jusqu'à ce qu'ils se touchent entre eux et vaporisation finale de ce qui reste dans les interstices très progressivement et loin au-dessus de la température normale d'ébullition de l'agglomérant énergiquement adsorbé. L'avantage frappant présenté par cette méthode au point de vue de l'évacuation est que, partant d'un agglomérant solide à la température ordinaire on obtient des pièces crues elles-mêmes solides et ne présentant aucune tendance à une transformation spontanée; au contraire les agglomérants liquides jouissant d'une tension de vapeur notable dès la température ordinaire conduisent à des pièces crues en évolution constante et en fait les plus grandes précautions doivent effectivement être prises pour que l'évacuation qui commence ainsi spontanément soit correctement conduite : les pièces sont enfermées dans des enceintes à température constante où règne une humidité en rapport avec cette température pour éviter la formation de la croûte superficielle déjà mentionnée et elles doivent souvent traverser plusieurs enceintes de ce type et y séjourner pendant des temps en rapport avec leur épaisseur, souvent fort longs avant de pouvoir être réputées assez « sèches » pour aborder le four de cuisson. Encore cette sécheresse est-elle imparfaite puisque l'agglomérant résiduel qui ne s'évacue qu'à la cuisson reste doué d'une tension de vapeur appréciable dans les conditions ordinaires. On voit donc l'immense simplification apportée par le procédé qui conduit à des pièces d'emblée parfaitement sèches et dont la conservation avant cuisson est pratiquement indéfinie sous la seule réserve de rester à l'abri de toute action physique ou chimique sur l'un quelconque des constituants de la pâte.

Remarquons pour terminer que *dans tous les cas* lorsque le mouillage est imparfait les gaz adsorbés qui restent répartis dans la masse séparent les particules élémentaires entre lesquelles les actions capillaires ne peuvent plus jouer. En pratique, la masse se trouve alors divisée en granules distincts, ayant tendance à s'isoler en îlots ou même individuellement, au sein desquels le mouillage est parfait; chaque îlot se comporte comme un centre de retrait non lié par les forces capillaires à ses voisins et la porosité finale de la masse sera d'autant plus grande, son retrait et sa cohésion d'autant plus faibles, qu'ils seront plus nombreux et plus petits.

Si l'on agglomère une même composition de base avec un mélange en proportions variables de deux agglomérants dont l'un est mouillant et l'autre ne l'est pas, on observe effectivement que la porosité augmente tandis que le retrait diminue à mesure que croît la proportion relative du non mouillant.

Conclusion.

Les trois rôles que doit jouer un agglomérant pour donner satisfaction sont donc tous remplis au mieux par un *solide facilement fusible* dispersé à l'état solide dans la poudre de base et adsorbé ensuite par elle à l'état liquide. L'agglomération peut alors se faire à chaud ou à froid, elle assure une excellente cohésion puis une évacuation facile à la cuisson sans rupture des contacts moléculaires nécessaires à l'obtention d'une masse compacte.

Le procédé d'agglomération ainsi mis au point par nos Laboratoires a déjà fait l'objet de larges applications dans le domaine de la fabrication industrielle pratique.

LE PROBLÈME DU DÉMINAGE TERRESTRE.

DÉTECTION DE MASSES MÉTALLIQUES DE FAIBLES DIMENSIONS.

PAR H. GRUMEL ET P. MOREL.

Ingénieurs à la Société française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *La surprenante évolution des mines terrestres de la période d'avant-guerre à la fin des hostilités révèle une floraison inattendue des parades que cette arme nouvelle a constamment opposée à la présence des détecteurs destinés à les neutraliser. Les pertes énormes qu'elles provoquaient exigeaient une mise au point rapide de ces appareils.*

Il est apparu intéressant d'exposer brièvement l'évolution parallèle des recherches qui devaient tenir compte d'un état de choses si variable et si progressif.

Les auteurs du présent article montrent que le choix actuel du principe d'un détecteur moderne doit s'appuyer sur toutes les données d'un problème rendu complexe par une suite de conditions souvent simultanées et opposées.

Ils précisent en outre les raisons qui ont conduit à réaliser le dernier né des appareils étudiés par la Société française Radioélectrique suivant un modèle qui tient compte le plus possible des exigences de demain.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

A. Le problème du déminage.

Les enseignements de la guerre et la connaissance de toutes les données du problème du déminage en France ont fixé le cadre de réalisation du détecteur de mines idéal.

Le choix du principe même de l'appareil devait être guidé par les conditions réelles de son emploi. Certaines se présentent d'elles-mêmes à l'esprit; il en est d'autres plus secondaires et plus confuses qui méritent un examen en raison de leurs effets.

Les unes sont psychologiques : le démineur moyen (militaire ou civil) éprouve pour le détecteur qui fait déceler à son oreille ce que le sol cache à ses yeux, une appréhension instinctive. Ce mystérieux engin, apte à le prémunir d'un piège mortel, ne gagnera sa confiance qu'autant que son fonctionnement sera sûr et qu'il sera capable de l'avertir de ses défaillances.

D'autres considérations relèvent de circonstances occasionnelles d'emploi : l'homme qui démine de nuit, à proximité immédiate de l'ennemi, en rampant jusqu'aux barbelés, scrute fièvreusement l'obscurité et ne dispose pas, en fait, de sa vue. Son sens auditif

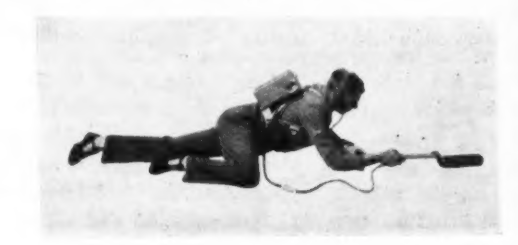


Fig. 1. — Opérateur couché.

peut être altéré par les bruits ambiants (explosions, détonations). Son oreille qui est à isoler de ces bruits, doit néanmoins percevoir les signaux de l'appareil et l'assurer du bon fonctionnement de ce dernier. Ce résultat doit être atteint malgré la présence du

casque. Aucun bruit ne doit trahir la présence de l'homme (amplification réduite, pas d'indications lumineuses).

Cette progression couchée sur un sol à relief inconnu ne laisse libres que les mains à l'exclusion des bras. L'explorateur doit être léger et maniable. L'approche ou le contact du sol qui se produira à chaque instant, ne doit pas affecter son fonctionnement.

L'appareillage doit laisser une parfaite aisance de tous les mouvements. Un réglage simple, décelable à l'oreille, ne doit pas obliger la main à accéder à un autre organe que l'explorateur, ni nécessiter d'appareil de mesure.

De tels déminages peuvent avoir lieu dans des régions dont les terrains sont recouverts soit, par le jeu du climat, de neige épaisse à basse température, soit, par suite d'opérations militaires ou d'inondations accidentelles, de nappes d'eau chaudes (Libye, Tunisie).

Des séjours prolongés de l'explorateur dans de tels milieux exigent une étanchéité et une insensibilité aux grands froids comme aux fortes chaleurs (-20°, $+30^\circ$ C).

Sous ces obstacles visibles, que recèle le sol ? Des mines anti-chars enterrées à 50 cm environ (plusieurs kilogs de métal) aux mines anti-personnelles enterrées à 15 cm (quelques grammes), il y a toute une gamme d'engins connus. Ainsi apparaît pour l'ingénieur la cote verticale de la zone d'efficacité à réaliser. Pour déterminer le volume à l'intérieur duquel cette efficacité doit être totale, il faut s'assurer le concours de l'opérateur qui ne voit que l'explorateur. Il est évident que la zone prospectée par ce dernier doit couvrir une surface plus grande que son contour apparent si l'on veut assurer une détection totale par recoupements successifs. Or, sauf lorsqu'il opère dans la neige, l'homme, souvent gêné par la configuration du terrain, ne peut acquérir la certitude d'avoir complètement détecté la zone où il va poser le pied, que si l'explorateur laisse un tracé visible durable.

L'expérience montre qu'une sensibilité suffisante pour découvrir quelques grammes de métal à 15 cm, décèle à coup sûr quelques kilogs à 50 cm. Cette seconde détection ne doit pas éblouir la première. Dans ce cas, une diminution convenable de la sensibilité fera s'évanouir la perturbation. Il faut pouvoir localiser des mines rapprochées et différentes.

Enfin des considérations pratiques méritent d'être retenues : le soldat qui mène une vie dangereuse et inconfortable n'apportera aucun soin particulier à un appareil dont il ignore les montages délicats.

Les intempéries, les chocs, les transports chaotiques interdisent l'emploi si séduisant du bois pour les plateaux de recherche et pour les parties basses des cannes. La pluie, l'humidité conduisent à enfermer tout l'appareillage dans des boîtiers étanches.

Le déplacement rapide des unités condamne l'emploi des piles lourdes et encombrantes. Leur faible capacité conduit à un stockage incompatible avec un approvisionnement facile et une bonne conservation.

B. Qualités que doit posséder un bon détecteur de mines.

Ce rapide exposé fixe à l'ingénieur le cadre de ses recherches et les solutions au problème posé doivent satisfaire aux exigences résumées ci-après :

I. Exigences électriques concernant la sécurité du personnel et la sûreté du déminage :

a. Circuits réglés en usine;

b. Réglage stable et simple tenant compte des conditions locales;

c. Sensibilité totale dans certaines limites et réglage à volonté;

d. Effet de sol nul;

e. Signalisation certaine à l'oreille de toute panne.

II. Exigences militaires fixant les modalités de construction :

a. Système de signalisation discret pour l'ennemi, isolant l'opérateur des bruits ambiants et permettant le port du casque;

b. Fonctionnement assuré de l'appareil avec ou sans canne;

c. Alimentation sans piles;

d. Robustesse par emploi de matières plastiques et de métaux légers;

e. Élasticité de tous les supports contre les chocs;

f. Étanchéité à l'eau de tous les boîtiers.

III. Exigences pratiques relatives aux qualités d'emploi :

a. Marquage des zones détectées;

b. Légèreté et maniabilité;

c. Fixation dorsale de tout l'appareillage (prospection couchée);

d. Centrage de la partie mobile.

EXAMEN THÉORIQUE DU DÉTECTEUR DE MINES.

A. **Choix d'un principe.**

Dès 1939, la S. F. R., répondant au désir exprimé par le Ministère de la Guerre, étudiait diverses méthodes de détection d'objets métalliques enterrés à des profondeurs diverses dans le sol.

A cette époque, les mines en service, françaises et étrangères, comportaient plusieurs kilogs de métal et, fait très important, ces mines présentaient de grandes surfaces soit verticales, soit horizontales.

Des données aussi nettes rendaient séduisant tout dispositif électro-magnétique *a priori* simple et léger.

Plusieurs solutions, s'appuyant sur des principes très différents furent expérimentées et donnèrent des résultats comparables.

Il restait à déterminer le procédé de signalisation le plus pratique.

La vue de l'opérateur peut être considérée comme le sens le moins atteint au combat mais une lampe qui s'allume au passage d'une mine est indiscrète la nuit. Un appareil de mesure est trop délicat et sujet à erreurs.

Finalement, le contrôle auditif fut seul retenu, étant considéré comme le plus satisfaisant.

Un premier type d'appareil établi par la S. F. R. en 1939 (modèle 441) fonctionnant sur la fréquence d'un mégacycle apportait alors une solution satisfaisante au problème posé : un oscillateur à fréquence fixe battait à fréquence musicale avec un oscillateur dont la fréquence était commandée par un circuit oscillant constitué par une spire d'exploration. La fréquence de battement était envoyée directement sur un casque.

La constitution des mines à cette époque était telle que la nature géologique du sol masquant celles-ci intervenait peu, et la fréquence choisie assurait une pénétration excellente qu'aucun effet de sol ne venait atténuer.

La fin des hostilités permit d'établir avec certitude les caractéristiques des mines modernes. La « shuhmine » allemande, considérée comme la plus difficile à détecter, enterrée à 15 cm ne comportait plus qu'un percuteur *horizontal* en acier de quelques centimètres de longueur et de quelques millimètres de diamètre à l'exclusion de toute autre masse métallique.

Les hautes fréquences sont peu sensibles à de tels objets en métal magnétique. Pour obtenir un déséquilibre suffisant du spectre et une bonne pénétration des lignes de force dans des pièces horizontales aussi réduites, il fallait une fréquence très basse. Pour simplifier l'appareil, il fallait qu'elle reste audible. La fréquence de 280 p/sec choisie est une valeur de compromis entre ces deux limites inférieures.

Pour une telle fréquence, il fallait un organe de recherches disposé de telle sorte que l'effet de sol soit réduit au minimum possible.

Le principe adopté qui est exposé ci-dessous le supprime pratiquement.

B. **Le détecteur S. F. R. 451.**

I. *Principe.*

L'organe principal du détecteur est l'explorateur que l'on déplace parallèlement à la surface du sol.

Celui-ci est essentiellement composé :

— D'une bobine dite d'émission, B_e (*fig.* 2) à noyau de fer droit, aux bornes de laquelle est

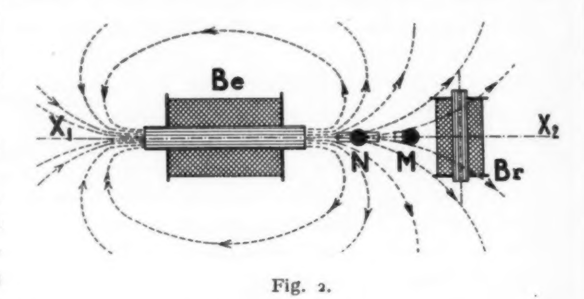


Fig. 2.

appliquée une tension à la fréquence musicale de 280 p/sec environ, produite par un oscillateur à lampes.

— D'une bobine dite de réception, B_r également à noyau de fer droit reliée à un amplificateur alimentant des écouteurs téléphoniques.

Ces deux bobines sont disposées dans un même plan, l'axe de la bobine d'émission passant par la perpendiculaire élevée au milieu de l'axe de la bobine de réception.

Il résulte de la symétrie du dispositif par rapport à l'axe X_1X_2 et, par conséquent de la forme symétrique du spectre magnétique produit par la bobine B_e, que le flux résultant passant à travers la bobine B_r est nul. On ne recueillera donc normalement aucune tension aux bornes de cette bobine.

Par contre, dès qu'une pièce métallique sera placée dans le champ de la bobine d'émission, elle sera le

siège de courants induits qui provoqueront le déséquilibre du système, et une tension apparaîtra aux bornes de B_r. L'effet sera évidemment beaucoup plus important si la pièce approchée est en métal magnétique.

II. *Circuits électriques.*

La bobine B_e forme, avec une capacité C_e placée à ses bornes (*fig.* 3), le circuit oscillant d'un oscillateur à lampes à montage symétrique (pentodes P_e et P'_e montées en triodes).

L'utilisation d'un tel montage est nécessitée, à la fois, pour assurer une grande stabilité d'oscillation et réduire à une faible valeur l'harmonique 2, la surtension des circuits étant inévitablement assez faible à la fréquence de 280 p/sec.

La bobine B_r forme, avec la capacité C_r, un circuit oscillant connecté entre grille de commande et filament de la première lampe d'un amplificateur à deux étages à résonance (pentodes P_r et P'_r).

Sur le circuit anodique du deuxième étage est placé un transformateur d'adaptation T, attaquant les écouteurs téléphoniques E. Le gain de cet amplificateur est de l'ordre de 70 db.

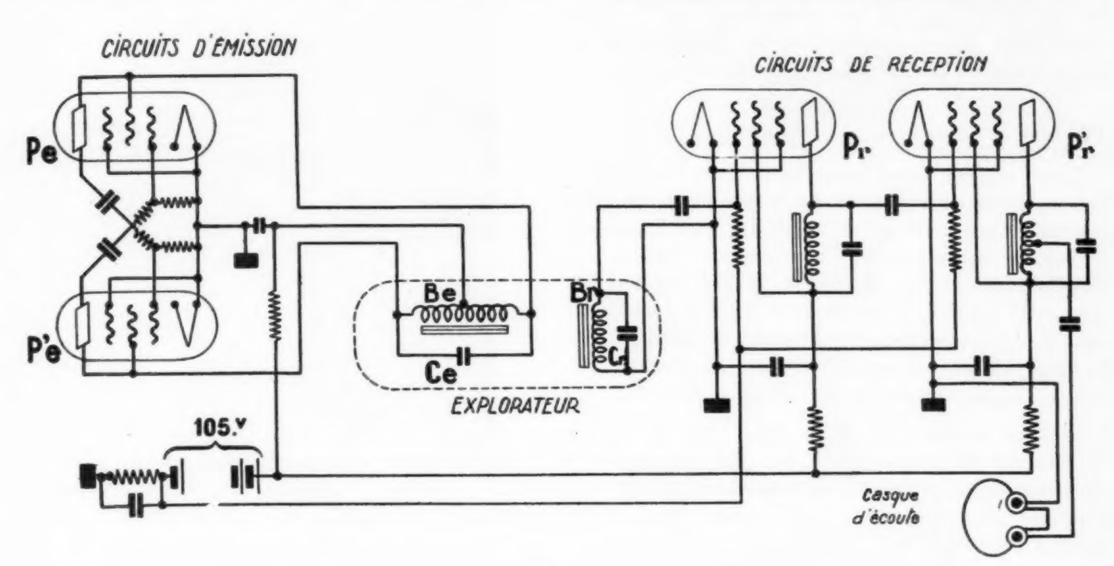


Fig. 3.

Les lampes utilisées, tant à l'émission qu'à la réception sont des pentodes type R 236 de la Radiotechnique à très faible consommation de filament (65 mA sous 1,4 V).

Les sources d'alimentation, tant pour la tension filament (1,4 V) que pour la tension anodique (105 V) sont communes à l'émission et à la réception.

III. *Dispositif de réglage.*

Le réglage théorique consiste à amener au couplage nul la bobine de réception par rapport à la bobine d'émission lorsque l'explorateur est éloigné de toute masse métallique.

Pour obtenir un réglage pratique et stable, les deux bobines sont fixées rigidement, leur position étant déterminée de façon immuable lors du réglage initial; le dispositif de réglage laissé à la disposition de l'opérateur pour corriger les légers déplacements des bobines dus aux déformations du support est constitué par une petite palette de fer doux montée excentriquement sur un pivot commandé par un bouton de réglage et placée en M (*fig.* 2).

Pratiquement, ce seul organe M n'est pas suffisant pour annuler la tension induite dans la bobine B_r car les différentes pièces métalliques du montage sont le siège de courants de Foucault donnant naissance à un flux parasite non en phase avec le flux principal. Pour compenser cet effet, une spire en court-circuit montée sur pivot commandé par un bouton de réglage placé en N, peut être orientée convenablement.

Dès lors, on voit qu'il suffit de retoucher de proche en proche M et N jusqu'à obtenir le silence au casque.

En fait, la tension à 280 p/sec appliquée à la bobine B_e n'est pas rigoureusement sinusoïdale; or la compensation faite par l'organe de réglage N n'est évidemment valable que pour une seule fréquence. Il en résulte que, par la manœuvre des boutons M et N, on n'obtiendra que l'annulation du terme fondamental et l'on entendra au casque pour ce réglage, un résidu harmonique bien reconnaissable à son timbre très différent du son à 280 p/sec.

Ce résidu est d'ailleurs extrêmement faible, étant partiellement filtré par l'amplification à résonance. Il présente l'intérêt de permettre un contrôle permanent du fonctionnement de l'appareil et de son réglage correct durant la prospection.

IV. *Considérations sur la sensibilité de l'appareil.*

L'explorateur étant placé dans l'air, loin du sol, la sensibilité de l'appareil peut être théoriquement poussée aussi loin qu'on le désire par l'augmentation de puissance de l'oscillateur d'émission et l'augmentation de coefficient d'amplification du dispositif récepteur, de façon à rendre audible au casque des variations de couplage de plus en plus faibles, provoquées par la présence de pièces métalliques de plus en plus petites et lointaines.

Plus la sensibilité est poussée, plus la rigidité du support de l'explorateur doit être grande et le montage soigné pour que les variations parasites de couplage dues aux déformations soient négligeables devant les variations à déceler.

Pratiquement, comme l'appareil est destiné à la recherche de pièces métalliques enfoncées dans le sol, il est illusoire et même nuisible d'augmenter la sensibilité de l'appareil au delà d'une certaine limite déterminée par la conductibilité du sol dans lequel est faite la prospection.

Il est, en effet, évident que le sol au voisinage de l'explorateur sera le siège de courants induits dont l'importance dépendra de sa conductibilité et qui provoqueront sur l'appareil une perturbation équivalente à celle d'une certaine masse de métal placée à une profondeur donnée. Toute pièce métallique dont l'importance ne sera pas nettement supérieure à cette masse ne pourra pas être détectée.

Ceci conduit à adjoindre à l'appareil un organe de réglage de sensibilité commandant le coefficient d'amplification du dispositif récepteur. L'opérateur doit, dès lors, se placer sur la sensibilité la plus grande que permet le sol dans lequel est faite la prospection.

RÉALISATION DU DÉTECTEUR S. F. R.

A. Description de l'appareil.

Conçu pour équiper l'Armée française, ce détecteur a été réalisé avec des matériaux entièrement français à l'exclusion du bois.

Des alliages légers et des bakélites à choc assurent simultanément légèreté et robustesse (*fig.* 4).



Fig. 4. — Opérateur équipé.

L'appareillage a été étudié pour assurer une parfaite aisance des mouvements de l'opérateur et comprend trois parties essentielles :

— La canne d'exploration;
— La boîte de détection et sa boîte de contrôle;
— Le casque d'écoute.

La canne d'exploration formée d'un manche métallique repliable en deux parties est terminée par un explorateur en bakélite à choc, orientable de 180° autour d'un manche en duralumin très court pour permettre la détection dans la position couchée. Toute la canne est étanche et peut séjourner dans l'eau.

L'explorateur (*fig.* 5) est formé de deux coquilles accolées dans le plan vertical suivant leur grand axe. L'une sert de boîtier sur lequel sont fixées

rigidement à chaque extrémité la self d'émission et la self de réception dans deux alvéoles séparés. Entre celles-ci, dans une cavité centrale, se trouvent une spire en court-circuit et une petite masse d'acier mobiles autour d'axes horizontaux commandés par les boutons de réglage. L'autre coquille forme couvercle, sa fixation sur la première par une série de vis disposées sur la périphérie assure la rigidité de l'ensemble. L'étanchéité du joint entre les deux coquilles est assurée par une matière spéciale restant plastique entre — 20° et + 60° C.

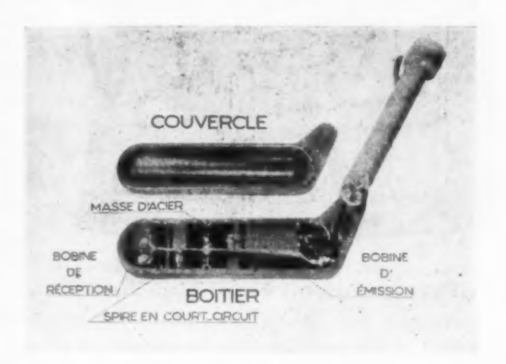


Fig. 5. — Détecteur de mines DM 2 (451), intérieur de l'explorateur, couvercle ouvert.

La liaison de l'explorateur avec la boîte de détection se fait par un câble souple en deux tronçons réunis, au moment de l'emploi, par une prise multiple.

La canne, suspendue par une bretelle sur l'épaule droite de l'homme, est mobile dans tous les sens autour de ce point de suspension. La main de l'opérateur lui imprime ainsi très facilement tous les mouvements désirés.

Un appareil de marquage très simple utilise la canne supérieure dont les deux tubes, reliés entre eux par un tuyau de caoutchouc, servent de réservoirs à un liquide coloré. Celui-ci s'écoule par un tube de dural orientable terminé par une buse spéciale qui peut toucher les sols boueux sans inconvénient. Cette buse projette sur le sol, à la verticale de la partie arrière de l'explorateur, un jet de débit constant (*fig.* 6).

La boîte de détection (*fig.* 7 et 8) est portée dorsalement. Une suspension élastique faite de courroies de chanvre est réalisée de telle façon que le dos de l'opérateur n'ait aucun contact avec la boîte et que le poids de celle-ci soit réparti sur une grande surface. Toute fatigue apparente sur un point précis est ainsi évitée.

Elle est étanche car son couvercle repose sur un joint épais de caoutchouc épousant la forme de la boîte et trois presse-étoupes laissent sortir :

— Le câble allant à l'explorateur terminé par la partie mâle d'une prise multiple dont la partie

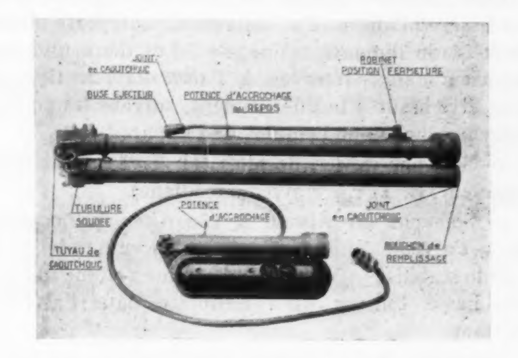


Fig. 6. — Canne repliée et appareil de marquage.

femelle est portée par le câble venant de l'explorateur.

— Le câble allant au casque terminé par un jack qui ferme le circuit des piles haute et basse



Fig. 7. — Boîte de détection fermée.

tension quand la fiche du casque est introduite, car l'expérience a montré que les interrupteurs séparés n'étaient pas ouverts au repos par les opérateurs, conduisant ainsi à une consommation de piles exagérée.

— Le câble allant à la boîte de contrôle, munie d'un commutateur permettant de faire varier le

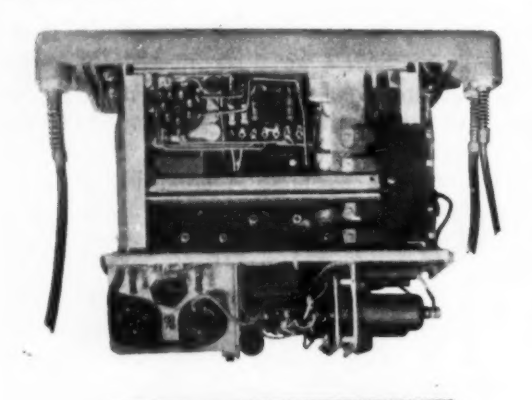
gain d'amplification. Cette boîte de contrôle, en alliage léger, s'adapte par une pince soit sur la partie avant de la ceinture, soit sur une des bretelles de suspension de la boîte de détection. Elle est ainsi très accessible.

Pour faciliter l'accès de tous les organes, une carcasse, solidaire du couvercle, comporte trois alvéoles de dimensions inégales. Les deux alvéoles supérieurs sont réservés à l'*alimentation*. Celle-ci peut être assurée indifféremment, suivant les conditions prévues pour l'emploi de l'appareil :

— Soit par un jeu de piles (H. T. 108 V alvéole supérieur, B. T. 1,4 V alvéole médiane).

— Soit par un vibreur à 150 p/sec qui occupe alors l'alvéole supérieur et un accumulateur à liquide stabilisé (2 V-20 AH) de même volume que la pile basse tension qu'il remplace dans l'alvéole médiane.

L'émetteur et le récepteur amplificateur, protégés par un masque facilement escamotable, occupent l'alvéole inférieur.



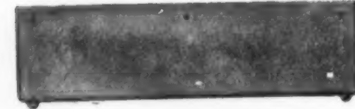


Fig. 8. — Boîte de détection ouverte équipée avec vibreur et accu.

Chocs et conditions atmosphériques n'ont ainsi aucun effet sur la partie la plus fragile de l'appareil.

Le casque d'écoute se caractérise par une forte impédance, une grande sensibilité et une faible fréquence de résonance.

Un serre-tête en toile avec mentonnière applique les deux écouteurs sur les oreilles de l'opérateur afin de l'isoler des bruits ambiants.

Sa forme et sa légèreté permettent l'emploi du casque de guerre sans aucune gêne.

Un coffret de transport contient l'appareil replié et ses rechanges (lampes et piles). Il est compartimenté et étudié pour amortir tous les chocs de transport (*fig.* 9).

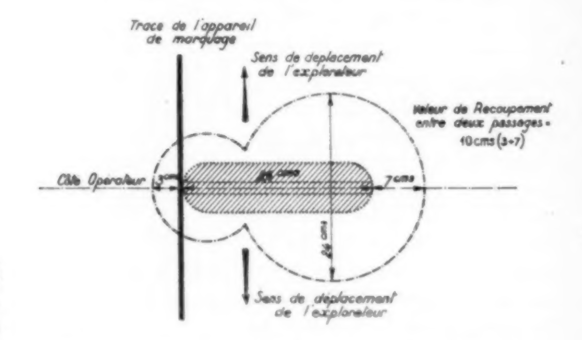


Fig. 9. — Appareil démonté dans sa valise.

B. **Résultats obtenus.**

1. *Sûreté du déminage.*

a. Sensibilité. — L'allumeur allemand ZZ 42 équipant les Schuhminen (masse métallique minimum) est détecté confortablement à 10 cm de profondeur dans un sol moyen à l'intérieur d'une surface limitée par une courbe d'allure conchoïdale qui se situe par rapport aux contours apparents de l'explorateur comme l'indique la figure 10.



. Fig. 10. — Surface d'efficacité à 10 cm d'un ZZ 42.

Une telle mine antichar est détectée dans les mêmes conditions jusqu'à 55 cm.

b. Effet de sol. — L'explorateur peut toucher sans inconvénient un sol sec.

La déformation du spectre électromagnétique ne se fait sentir qu'à 3 cm d'un sol fortement imprégné d'eau.

L'opérateur rencontrant une nappe d'eau ou de neige peut y introduire l'explorateur sans que les indications phoniques de l'appareil soient perturbées.

c. Réglage. — La manœuvre des boutons rétablit l'accord, compte tenu des conditions locales. Ce réglage mécanique ne fait appel qu'à un réflexe normal de l'oreille de l'opérateur. Il est, par construction, absolument stable en raison de la dureté des boutons. Il est simple puisqu'il ne comporte qu'une seule opération.

L'opérateur cherche le minimum de son aux écouteurs. Si l'alimentation se fait par pile, il fait apparaître l'harmonique 2 et familiarise son oreille à ce bruit de fond sensiblement différent des sons à 280 p/sec produits par l'approche d'une masse métallique. Si l'alimentation se fait par accumulateur, le contraste est plus marqué car la fréquence de vibration du vibreur (150 p/sec), sans augmenter le volume du bruit de fond, tranche nettement des indications phoniques (280 p/sec) résultant d'une rupture d'équilibre électromagnétique des bobines.

Les circuits sont tels que la disparition des harmoniques 2 ou l'étouffement du bruit du vibreur se produisent à coup sûr dès qu'une cause partielle provoque un arrêt de fonctionnement.

II. *Sécurité du personnel.*

La trace laissée sur le sol par l'appareil de marquage permet à l'opérateur de rectifier ses mouvements pour ne laisser aucune surface non détectée. L'automatisme de cette projection qui dure 30 min pour une consommation de 700 cm^3 assure à l'opérateur une liberté d'esprit complète et c'est, indépendamment de sa volonté, que les mouvements de gauche à droite et d'avant en arrière qu'il fait subir à l'explorateur pour localiser une masse métallique font apparaître sur le sol une croix noire qui matérialise la position réelle de la masse par recoupements de ses branches.

Si une panne se produit en cours de prospection, le bruit de fond cesse brusquement.

Si le réglage est modifié pour une cause inconnue, les écouteurs « hurlent ».

Dans les deux cas, il est immédiatement averti quelle que soit l'ambiance extérieure.

III. *Conclusion.*

Toutes les données du problème sont ainsi satisfaites. Ce détecteur réalise une parade efficace aux mines actuelles.

Sa robustesse, sa simplicité de réglage, son étanchéité en font un appareil apte à toutes missions militaires.

Quant au détecteur de demain plusieurs prototypes ont été expérimentés, le plus séduisant d'entre eux repose sur un principe de différentiation des radiations émises par les différentes matières dont peuvent être faites les mines et les radiations émises par les éléments géologiques d'un sol local. Ces radiations peuvent être d'ailleurs de nature très diverse, calorifiques ou autres.

Le réglage d'un tel appareil relève du domaine du géophysicien. Il n'est pas à la portée du personnel recruté par conscription.

ERRATA AUX « ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ », N° 1.

Article de M. WARNECKE.

Page	*ligne*			*au lieu de*	*lire*
7	18	(colonne de gauche)		Liewellyn,	Llewellyn.
21	35	(colonne de droite)		fig. 26,	fig. 25.
21	36	»	»	fig. 27,	fig. 26.
26	16	»	»	fig. 33 et 34,	fig. 32 et 33.
27	19	»	»	fig. 36,	fig. 35.
35	10 et 18	»	»	i_2,	$\mathfrak{I}_2$.
38	5	»	»	alternative *u* fournie par le modulateur.	
38	7	»	»	U_1,	U.
45	25	»	»	fig. 55,	fig. 54.
45	27	»	3	fig. 54,	fig. 53.
48	13	(colonne de gauche)		fig. 59,	fig. 58.

Page 53, référence ([21]), *au lieu de* Liewellyn, *lire* L.ewellyn.

Article de M. GUENARD.

Remplacer les deux dernières formules de la page 75 par

$$I_0(\text{amp/cm}^2) < 1,56\,\frac{V_0^{\frac{3}{2}}(k.V)}{l^2(\text{cm})}$$

$$i_0(\text{amp}) < 1,22\,\frac{d^2}{l^2}\,V_0^{\frac{3}{2}}(k.V).$$

121908 — Imp. Gauthier-Villars, Paris
Dépôt légal — 1945 — N° 140.
O. P. L. 31.3033

